Proposition III.16 (Expérience-type associée à une loi de Bernoulli)**.** *Soit une expérience à 2 issues (par exemple P/F, ou tirage dans une urne contenant 2 types de boules), l'une représentant le succès et l'autre l'échec, la probabilité d'obtenir un succès étant p. Soit X prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.*

Une expérience telle que décrite dans la proposition précédente est usuellement appelée « expérience de Bernoulli ».

Remarque III.17 (15.3.17)**.** *Toute variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0,1\}$ est une variable de Bernoulli, à condition d'élargir la définition en acceptant de considérer les cas dégénérés $p=0$ et $p=1$. De façon équivalente, si une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ a une fonction génératrice affine, alors il s'agit d'une variable de Bernoulli (avec cette définition étendue).*

Définition III.18 (Loi binomiale)**.** *Soit X une v.a.r. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres (n,p) (et on note $X \sim B(n,p)$) si :*

$$X(\Omega) = [0,n], \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [0,n], \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ avec } q = 1-p.$$

Ceci définit bien une loi de probabilités. En effet : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$.

Un calcul élémentaire (fait en MPSI) amène :

Proposition III.19 (Expérience-type associée à la loi binomiale)**.** *Soit X le nombre de succès obtenus lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Alors $X \sim B(n,p)$.*

Proposition III.20 (Espérance et variance d'une loi binomiale)**.** *Soit $X \sim B(n,p)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = ((1-p)+tp)^n, \qquad \mathbb{E}(X) = np, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = npq.$$

Éléments de preuve. La série génératrice se calcule par la formule du binôme. Dériver pour obtenir l'espérance et la variance. □

III.3 Loi géométrique

Nous ajoutons à ce catalogue deux nouvelles lois, discrètes, mais non finies.
La première correspond à la loi du temps d'attente dans une succession infinie de tirages à Pile ou Face. On sait, d'après le théorème 15.1.36, définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience. On se place dans cet espace probabilisé.

Proposition III.21 (Temps d'attente du premier succès)**.** *Soit T la variable égale au rang du premier succès lors d'une succession infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p, éventuellement égale à $+\infty$ si le succès n'est jamais obtenu. Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) = pq^{n-1}, \qquad \text{et} \qquad P(X=+\infty) = 0.$$

Ainsi, la valeur $+\infty$ n'est pas pertinente dans la description de la loi, et on peut définir la loi géométrique de X sans la valeur infinie.

Définition III.22 (Loi géométrique)**.** *On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, si $(X \in \mathbb{N}^*)$ est presque sûr, et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) = pq^{n-1}, \qquad \text{avec } q = 1-p.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Et par notre motivation même :

Proposition III.23 (Expérience-type associée à une loi géométrique)**.** *Soit X le temps d'attente du premier succès lors d'une répétition infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.*

Proposition III.24 (Fonction génératrice, espérance et variance d'une loi géométrique)**.** *Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Alors*

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Éléments de preuve. On présente le calcul de l'espérance de X par fonction génératrice et par calcul direct. □

III.4 Loi de Poisson

Définition III.25 (Loi de Poisson)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et X une v.a.r. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si :*

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}.$$

D'après les résultats sur les séries exponentielles, cela définit bien une loi de probabilité.

De plus :

Proposition III.26 (Espérance et variance d'une loi de Poisson)**.** *Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}, \qquad \mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Proposition III.27 (Limite en loi de variables binomiales)**.** *Soit (X_n) une suite de variables binomiales de paramètres (n, p_n), telles que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Alors*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On dit que la suite (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Remarque III.28 (15.3.28)**.** *Pour cette raison, la loi de Poisson modélise le nombre de succès lorsque le succès est un événement rare (i.e. de petite probabilité) et que la population est très grande.*
Une situation typique est l'affluence (à un magasin, à un parc d'attraction etc.), lors d'un laps de temps donné (par exemple une journée), dans une population très grande. Chaque individu de la population a une probabilité p très faible d'aller à ce lieu lors d'une journée donnée, et la population N est très grande. Ainsi, la loi $B(N, p)$ représentant l'affluence au lieu donné pendant la période donnée est assez voisine de la loi $\mathcal{P}(Np)$. Ainsi, en posant $\lambda = Np$, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne modélisation de l'affluence.

III.5 Stabilités (HP classique)

Par stabilité d'une loi classique, on entend la chose suivante : si X et Y suivent un certain type de loi et sont indépendantes, alors $X + Y$ suit une loi de même type (avec des paramètres éventuellement différents). Nous énonçons ici deux propriétés de stabilité.

Proposition III.29 (Stabilité des lois binomiales)**.** *Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in]0, 1[$. Si $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim B(n + m, p)$.*