III.2 Rappels sur les lois usuelles finies

On rappelle rapidement les lois usuelles finies classiques, en complétant leur étude par la description de leur fonction génératrice. On présente une alternative au calcul direct de leur espérance et de leur variance, en se servant des séries génératrices, et on se sert des fonctions génératrices également pour justifier une propriété de stabilité.

Définition III.10 (Loi uniforme)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une v.a.r. X suit la loi uniforme de paramètre n si $X(\Omega) = [1, n]$ et si :*

$$\forall k \in [1, n], \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Proposition III.11 (Fonction génératrice, espérance et variance d'une loi uniforme)**.** *Soit $X \sim \mathcal{U}(n)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \frac{t(1-t^n)}{n(1-t)} \quad (\text{pour } t \neq 1), \quad G_X(1) = 1,$$

et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Éléments de preuve. C'est juste pour refaire le calcul avec la fonction génératrice, qui donne une version plutôt plus compliquée ici que la méthode directe. □

Pour tout ensemble fini E on note plus généralement $X \sim \mathcal{U}(E)$ pour une v.a.r. suivant la loi uniforme sur X, c'est-à-dire une v.a.r. telle que :

$$\forall x \in E, \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}.$$

Proposition III.12 (Expérience-type associée à une loi uniforme)**.** *Soit U une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage avec équiprobabilité, et on note X le numéro de la boule obtenu. Alors $X \sim \mathcal{U}(n)$.*
Plus généralement, si X est une variable suivant une loi uniforme sur l'ensemble $[a, b]$, elle vérifie :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Définition III.13 (Loi de Bernoulli)**.** *Soit X une v.a.r. et $p \in]0, 1[$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (et on note $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $X \sim \mathcal{B}(p)$) si :*

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \\ \mathbb{P}(X = 1) = p \end{cases}$$

Désormais, on se donne un réel $p \in]0, 1[$, et on note $q = 1 - p$.

Proposition III.14 (Espérance et variance d'une loi de Bernoulli)**.** *Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (1-p) + tp, \qquad \mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = pq.$$

Éléments de preuve. Un peu trivial... Mais le vérifier aussi avec la série génératrice. □

Exemple III.15 (Fonction indicatrice d'un événement)**.** *Étude de $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

La motivation même de la définition de la loi de Bernoulli amène :

Proposition III.16 (Expérience-type associée à une loi de Bernoulli)**.** *Soit une expérience à 2 issues (par exemple P/F, ou tirage dans une urne contenant 2 types de boules), l'une représentant le succès et l'autre l'échec, la probabilité d'obtenir un succès étant p. Soit X prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.*

Une expérience telle que décrite dans la proposition précédente est usuellement appelée « expérience de Bernoulli ».

Remarque III.17 (15.3.17)**.** *Toute variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0,1\}$ est une variable de Bernoulli, à condition d'élargir la définition en acceptant de considérer les cas dégénérés $p=0$ et $p=1$. De façon équivalente, si une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ a une fonction génératrice affine, alors il s'agit d'une variable de Bernoulli (avec cette définition étendue).*

Définition III.18 (Loi binomiale)**.** *Soit X une v.a.r. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres (n,p) (et on note $X \sim B(n,p)$) si :*

$$X(\Omega) = [0,n], \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [0,n], \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ avec } q = 1-p.$$

Ceci définit bien une loi de probabilités. En effet : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$.

Un calcul élémentaire (fait en MPSI) amène :

Proposition III.19 (Expérience-type associée à la loi binomiale)**.** *Soit X le nombre de succès obtenus lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Alors $X \sim B(n,p)$.*

Proposition III.20 (Espérance et variance d'une loi binomiale)**.** *Soit $X \sim B(n,p)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = ((1-p)+tp)^n, \qquad \mathbb{E}(X) = np, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = npq.$$

Éléments de preuve. La série génératrice se calcule par la formule du binôme. Dériver pour obtenir l'espérance et la variance. □

III.3 Loi géométrique

Nous ajoutons à ce catalogue deux nouvelles lois, discrètes, mais non finies.
La première correspond à la loi du temps d'attente dans une succession infinie de tirages à Pile ou Face. On sait, d'après le théorème 15.1.36, définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ modélisant cette expérience. On se place dans cet espace probabilisé.

Proposition III.21 (Temps d'attente du premier succès)**.** *Soit T la variable égale au rang du premier succès lors d'une succession infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p, éventuellement égale à $+\infty$ si le succès n'est jamais obtenu. Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) = pq^{n-1}, \qquad \text{et} \qquad P(X=+\infty) = 0.$$

Ainsi, la valeur $+\infty$ n'est pas pertinente dans la description de la loi, et on peut définir la loi géométrique de X sans la valeur infinie.

Définition III.22 (Loi géométrique)**.** *On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, si $(X \in \mathbb{N}^*)$ est presque sûr, et*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=n) = pq^{n-1}, \qquad \text{avec } q = 1-p.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.