Proposition II.42 (Variance de $X_1+\cdots+X_n$)**.** *1. Soit $X_1,\dots,X_n \in L^2$; alors $X_1+\cdots+X_n \in L^2$ et :*

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n) + 2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{cov}(X_i,X_j).$$

2. Si de plus les X_i sont 2 à 2 indépendantes, ou plus généralement 2 à 2 décorrélées,

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n).$$

On peut réexprimer cette formule matriciellement.

Proposition II.43 (Réexpression matricielle de la variance d'une somme)**.** *Soit $C = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors : $\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = C^\top\cdot V(X_1,\dots,X_n)\cdot C$,*
où $V(X_1,\dots,X_n)$ est la matrice ci-dessous, appelée matrice des variances-covariances :

$$V(X_1,\dots,X_n) = (\operatorname{cov}(X_i,X_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

Ainsi, la variance est la somme des coefficients de la matrice des variances-covariances. Ce point de vue simplifie souvent les manipulations sommatoires, notamment lorsque l'expression des covariances suit un motif en diagonales (constante sur chaque diagonale par exemple). Les considérations combinatoires deviennent plus évidentes sur la représentation matricielle.

III. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, lois usuelles

Nous voyons maintenant les lois classiques au programme. Avant de faire leur étude, on remarque que toutes les lois classiques sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Dans ce contexte on dispose d'un outil calculatoire efficace, apprécié également dans un contexte combinatoire.

III.1 Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition III.1 (Série et fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série génératrice de X est la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n$. La fonction génératrice de X est la somme de la série génératrice et est notée G_X :*

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n,$$

pour tout t dans le domaine de convergence de la série génératrice.

Proposition III.2 (Rayon de convergence de la série génératrice)**.** *La série génératrice $\sum\mathbb{P}(X=n)t^n$ converge normalement sur $\overline{B}(0,1)\subset\mathbb{C}$. En particulier, son rayon R vérifie $R\geq 1$.*

En utilisant la formule de transfert, on obtient alors :

Corollaire III.3 (Réexpression de G_X comme une espérance)**.** *Pour tout $t\in\dot{B}(0,R)\cup\overline{B}(0,1)$,*

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

Corollaire III.4 (Régularité de G_X)**.** *1. La fonction génératrice G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\dot{B}(0,R)$ (donc en particulier sur $\dot{B}(0,1)$).*
2. La fonction génératrice est continue sur $\overline{B}(0,1)$.

Remarque III.5 (15.3.5)**.** *Si $R>1$, le point 2 est redondant. En revanche, il apporte une information nouvelle si $R=1$.*

Les fonctions génératrices donnent un outil calculatoire efficace d'étude des variables aléatoires. En particulier, elles permettent de reconnaître et comparer des variables aléatoires. En effet :

Théorème III.6 (Détermination de la loi de X par sa fonction génératrice)**.** *1. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $G_X = G_Y$, alors $X \sim Y$.*
2. Plus précisément,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

La fonction génératrice donne également un accès direct à l'espérance, et presque direct à la variance.

Théorème III.7 (Expression de l'espérance à l'aide de la fonction génératrice)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et G_X sa fonction génératrice, considérée comme fonction d'une variable réelle. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $X \in L^1$ (ii) G_X est dérivable en 1.
Dans ce cas, on a $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Éléments de preuve. Si le rayon R de la série génératrice vérifie $R > 1$, R est aussi le rayon de la série dérivée, et cela résulte des propriétés de dérivation des séries entières. Sinon, le résultat est un corollaire du théorème 13.2.15 (la dérivabilité correspond dans ce cas à la dérivabilité à gauche).
Comme le théorème 13.2.15 n'est pas explicitement au programme, on rappelle que le sens direct $(i) \implies (ii)$ est une application simple du théorème d'Abel radial. La démonstration du sens réciproque $(ii) \implies (i)$ n'est pas exigible. □

Théorème III.8 (Expression de la variance à l'aide de la fonction génératrice)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $X \in L^2$ (ii) G_X est deux fois dérivable en 1.
Dans ce cas, on a $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

Éléments de preuve. $X \in L^2$ si $X(X-1) \in L^1$. Cela correspond, par formule de transfert, à la dérivée seconde de la série génératrice.
Ensuite utiliser la formule de König-Huygens. □

Une dernière propriété importante est l'accès facile à la loi d'une somme de variables indépendantes.

Théorème III.9 (Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes)**.** *1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et R_X et R_Y les rayons de convergence de leurs séries génératrices. Alors*

$$\forall t \in \dot{B}(0, \min(R_X, R_Y)) \cup \overline{B}(0,1), G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, et R_i le rayon de la série génératrice de X_i. Alors

$$\forall t \in \dot{B}(0, \min(R_i)) \cup \overline{B}(0,1), G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_n}(t).$$

Éléments de preuve. Le point 1 par produit de Cauchy. Le point 2 par récurrence. □

III.2 Rappels sur les lois usuelles finies

On rappelle rapidement les lois usuelles finies classiques, en complétant leur étude par la description de leur fonction génératrice. On présente une alternative au calcul direct de leur espérance et de leur variance, en se servant des séries génératrices, et on se sert des fonctions génératrices également pour justifier une propriété de stabilité.

Définition III.10 (Loi uniforme)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une v.a.r. X suit la loi uniforme de paramètre n si $X(\Omega) = [1, n]$ et si :*

$$\forall k \in [1, n], \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Proposition III.11 (Fonction génératrice, espérance et variance d'une loi uniforme)**.** *Soit $X \sim \mathcal{U}(n)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \frac{t(1-t^n)}{n(1-t)} \quad (\text{pour } t \neq 1), \quad G_X(1) = 1,$$

et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Éléments de preuve. C'est juste pour refaire le calcul avec la fonction génératrice, qui donne une version plutôt plus compliquée ici que la méthode directe. □

Pour tout ensemble fini E on note plus généralement $X \sim \mathcal{U}(E)$ pour une v.a.r. suivant la loi uniforme sur X, c'est-à-dire une v.a.r. telle que :

$$\forall x \in E, \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}.$$

Proposition III.12 (Expérience-type associée à une loi uniforme)**.** *Soit U une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage avec équiprobabilité, et on note X le numéro de la boule obtenu. Alors $X \sim \mathcal{U}(n)$.*
Plus généralement, si X est une variable suivant une loi uniforme sur l'ensemble $[a, b]$, elle vérifie :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

Définition III.13 (Loi de Bernoulli)**.** *Soit X une v.a.r. et $p \in]0, 1[$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (et on note $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ ou $X \sim \mathcal{B}(p)$) si :*

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \\ \mathbb{P}(X = 1) = p \end{cases}$$

Désormais, on se donne un réel $p \in]0, 1[$, et on note $q = 1 - p$.

Proposition III.14 (Espérance et variance d'une loi de Bernoulli)**.** *Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (1-p) + tp, \qquad \mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = pq.$$

Éléments de preuve. Un peu trivial... Mais le vérifier aussi avec la série génératrice. □

Exemple III.15 (Fonction indicatrice d'un événement)**.** *Étude de $X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.*

La motivation même de la définition de la loi de Bernoulli amène :