Remarque II.34 (Interprétation de la covariance). *Si* $\mathrm{cov}(X,Y) > 0$, $X - \mathbb{E}(X)$ *et* $Y - \mathbb{E}(Y)$ *ont tendance à être de même signe, donc* X *et* Y *ont tendance à se situer du même côté de leur espérance. Ainsi :*
$\mathrm{cov}(X,Y) > 0$ *signifie que* X *et* Y *ont tendance à évoluer parallèlement.*
$\mathrm{cov}(X,Y) < 0$ *signifie que* X *et* Y *ont tendance à avoir une évolution opposée.*

Définition II.35 (Variables décorrélées). *Les variables* X *et* Y *sont dites décorrélées lorsque* $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Proposition II.36 (Propriétés de la covariance). *Soit* $X, Y \in L^2$.
1. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
2. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$ *(symétrie)*
3. cov *est bilinéaire sur l'espace des v.a.r.d. sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *admettant un moment d'ordre 2.*
4. $\mathrm{cov}(X,X) = \mathbb{V}(X)$
5. $\mathrm{cov}(1,X) = 0$
6. Si X *et* Y *sont indépendantes,* $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Éléments de preuve. Assez immédiat par linéarité de l'espérance. □

Remarque II.37 (Avertissement 15.2.38). *La réciproque de la dernière propriété est fausse : il existe des variables décorrélées, mais non indépendantes. Voir les exercices pour des exemples.*

Les propriétés 2, 3 et 4 permettent d'affirmer que cov est une forme bilinéaire symétrique positive, de forme quadratique associée égale à la variance. En particulier, on dispose d'une deuxième inégalité de Cauchy-Schwarz :

Théorème II.38 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance, HP). *Soit* $X, Y \in L^2$. *Alors*

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y),$$

avec égalité si et seulement s'il existe une relation affine presque sûrement entre X *et* Y *(c'est-à-dire une relation non triviale* $aX + bY + c = 0$*).*

Remarque II.39 (15.2.40). *Sans être explicitement au programme, cette inégalité peut être considérée comme étant au programme, puisqu'il ne s'agit de rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance appliquée aux variables centrées* $X - \mathbb{E}(X)$ *et* $Y - \mathbb{E}(Y)$.

II.6 Variance d'une somme

Une autre formule issue directement de l'algèbre bilinéaire (et du lien entre une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée) est la formule de polarisation :

Proposition II.40 (Formule de polarisation). *Soit* $X, Y \in L^2$. *Alors :*

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)).$$

Cette formule est dans notre contexte surtout utilisée pour calculer la variance d'une somme à l'aide des covariances. Nous la réexprimons donc de la façon suivante :

Proposition II.41 (Variance d'une somme). *1. Si* $X, Y \in L^2$, *alors* $X + Y \in L^2$, *et :*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \cdot \mathrm{cov}(X,Y).$$

2. Si de plus $X \perp Y$, *alors* $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

En utilisant la propriété de bilinéarité généralisée, on obtient de même l'expression de la variance d'une somme de n termes :

Proposition II.42 (Variance de $X_1+\cdots+X_n$)**.** *1. Soit $X_1,\dots,X_n \in L^2$; alors $X_1+\cdots+X_n \in L^2$ et :*

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n) + 2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{cov}(X_i,X_j).$$

2. Si de plus les X_i sont 2 à 2 indépendantes, ou plus généralement 2 à 2 décorrélées,

$$\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{V}(X_1)+\cdots+\mathbb{V}(X_n).$$

On peut réexprimer cette formule matriciellement.

Proposition II.43 (Réexpression matricielle de la variance d'une somme)**.** *Soit $C = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors : $\mathbb{V}(X_1+\cdots+X_n) = C^\top\cdot V(X_1,\dots,X_n)\cdot C$,*
où $V(X_1,\dots,X_n)$ est la matrice ci-dessous, appelée matrice des variances-covariances :

$$V(X_1,\dots,X_n) = (\operatorname{cov}(X_i,X_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.$$

Ainsi, la variance est la somme des coefficients de la matrice des variances-covariances. Ce point de vue simplifie souvent les manipulations sommatoires, notamment lorsque l'expression des covariances suit un motif en diagonales (constante sur chaque diagonale par exemple). Les considérations combinatoires deviennent plus évidentes sur la représentation matricielle.

III. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, lois usuelles

Nous voyons maintenant les lois classiques au programme. Avant de faire leur étude, on remarque que toutes les lois classiques sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Dans ce contexte on dispose d'un outil calculatoire efficace, apprécié également dans un contexte combinatoire.

III.1 Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition III.1 (Série et fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série génératrice de X est la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n$. La fonction génératrice de X est la somme de la série génératrice et est notée G_X :*

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n,$$

pour tout t dans le domaine de convergence de la série génératrice.

Proposition III.2 (Rayon de convergence de la série génératrice)**.** *La série génératrice $\sum\mathbb{P}(X=n)t^n$ converge normalement sur $\overline{B}(0,1)\subset\mathbb{C}$. En particulier, son rayon R vérifie $R\geq 1$.*

En utilisant la formule de transfert, on obtient alors :

Corollaire III.3 (Réexpression de G_X comme une espérance)**.** *Pour tout $t\in\dot{B}(0,R)\cup\overline{B}(0,1)$,*

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

Corollaire III.4 (Régularité de G_X)**.** *1. La fonction génératrice G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\dot{B}(0,R)$ (donc en particulier sur $\dot{B}(0,1)$).*
2. La fonction génératrice est continue sur $\overline{B}(0,1)$.

Remarque III.5 (15.3.5)**.** *Si $R>1$, le point 2 est redondant. En revanche, il apporte une information nouvelle si $R=1$.*