Définition II.27 (Variance et écart-type d'une variable aléatoire)**.** *Soit $X \in L^2$. Alors, en vertu de ce qui précède, $X - \mathbb{E}(X)$ est bien défini et L^2. On définit alors :*
- la variance de X :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x).$$

- l'écart type de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}.$$

Proposition II.28 (Positivité et stricte positivité de $\mathbb{V}$)**.** *Soit $X \in L^2$. Alors $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$, l'égalité étant obtenue si et seulement si X est constante presque sûrement.*

Dans la pratique, on calcule souvent la variance avec le résultat suivant.

Théorème II.29 (Formule de König-Huygens)**.** *Soit $X \in L^2$. Alors*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition II.30 (Quadraticité et invariance par translation de la variance)**.** *Soit a et b deux réels et $X \in L^2$. Alors $aX + b \in L^2$, et*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

Il arrive souvent de normaliser les variables aléatoires, afin de pouvoir les comparer. Il faut dans ce cas à la fois normaliser la valeur moyenne et la dispersion.

Définition II.31 (Variable centrée, réduite)**.** *Une variable X est dite :*
- centrée si $X \in L^1$, et $\mathbb{E}(X) = 0$ - réduite si $X \in L^2$, et $\mathbb{V}(X) = 1$ - centrée réduite si elle est à la fois centrée et réduite.

Proposition II.32 (Variable centrée réduite associée à X)**.** *Soit $X \in L^2$ telle que $\sigma(X) > 0$. Il existe d'uniques réels $a > 0$ et b tels que la variable X^* définie par $X^* = aX + b$ soit centrée réduite. Plus précisément,*

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

On dit que X^* est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

Éléments de preuve. Analyse synthèse par linéarité de $\mathbb{E}$ et quadraticité de $\mathbb{V}$. □

II.5 Covariance

Pour l'instant, contrairement au cas de l'espérance, nous n'avons pas donné de moyen de calculer la variance d'une somme. Nous avons en effet besoin pour cela d'un outil supplémentaire, qui nous permet de mesurer la dépendance entre deux variables.
En effet on comprend bien que la variance de $X + Y$ va fortement dépendre de la corrélation entre X et Y. Pour prendre deux cas extrêmes, supposons que X et Y suivent une même loi symétrique par rapport à 0 :
- si $X = Y$, on aura alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X)$; - si $X = -Y$, on aura alors $\mathbb{V}(X+Y) = 0$.
Ainsi, la seule donnée des lois de X et Y ne peut pas suffire à déterminer $\mathbb{V}(X+Y)$. La covariance $\mathrm{cov}(X, Y)$ va nous permettre de mesurer la propension de deux variables à évoluer de façon parallèle ou opposée.

Définition II.33 (Covariance)**.** *Soit X et Y deux variables L^2. Alors $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \in L^1$ et on définit la covariance de X et Y par :*

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big).$$

Remarque II.34 (Interprétation de la covariance). *Si* $\mathrm{cov}(X,Y) > 0$, $X - \mathbb{E}(X)$ *et* $Y - \mathbb{E}(Y)$ *ont tendance à être de même signe, donc* X *et* Y *ont tendance à se situer du même côté de leur espérance. Ainsi :*
$\mathrm{cov}(X,Y) > 0$ *signifie que* X *et* Y *ont tendance à évoluer parallèlement.*
$\mathrm{cov}(X,Y) < 0$ *signifie que* X *et* Y *ont tendance à avoir une évolution opposée.*

Définition II.35 (Variables décorrélées). *Les variables* X *et* Y *sont dites décorrélées lorsque* $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Proposition II.36 (Propriétés de la covariance). *Soit* $X, Y \in L^2$.
1. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
2. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$ *(symétrie)*
3. cov *est bilinéaire sur l'espace des v.a.r.d. sur* $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *admettant un moment d'ordre 2.*
4. $\mathrm{cov}(X,X) = \mathbb{V}(X)$
5. $\mathrm{cov}(1,X) = 0$
6. Si X *et* Y *sont indépendantes,* $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Éléments de preuve. Assez immédiat par linéarité de l'espérance. □

Remarque II.37 (Avertissement 15.2.38). *La réciproque de la dernière propriété est fausse : il existe des variables décorrélées, mais non indépendantes. Voir les exercices pour des exemples.*

Les propriétés 2, 3 et 4 permettent d'affirmer que cov est une forme bilinéaire symétrique positive, de forme quadratique associée égale à la variance. En particulier, on dispose d'une deuxième inégalité de Cauchy-Schwarz :

Théorème II.38 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance, HP). *Soit* $X, Y \in L^2$. *Alors*

$$|\mathrm{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y),$$

avec égalité si et seulement s'il existe une relation affine presque sûrement entre X *et* Y *(c'est-à-dire une relation non triviale* $aX + bY + c = 0$*).*

Remarque II.39 (15.2.40). *Sans être explicitement au programme, cette inégalité peut être considérée comme étant au programme, puisqu'il ne s'agit de rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance appliquée aux variables centrées* $X - \mathbb{E}(X)$ *et* $Y - \mathbb{E}(Y)$.

II.6 Variance d'une somme

Une autre formule issue directement de l'algèbre bilinéaire (et du lien entre une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée) est la formule de polarisation :

Proposition II.40 (Formule de polarisation). *Soit* $X, Y \in L^2$. *Alors :*

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)).$$

Cette formule est dans notre contexte surtout utilisée pour calculer la variance d'une somme à l'aide des covariances. Nous la réexprimons donc de la façon suivante :

Proposition II.41 (Variance d'une somme). *1. Si* $X, Y \in L^2$, *alors* $X + Y \in L^2$, *et :*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \cdot \mathrm{cov}(X,Y).$$

2. Si de plus $X \perp Y$, *alors* $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

En utilisant la propriété de bilinéarité généralisée, on obtient de même l'expression de la variance d'une somme de n termes :