II.2 Espérance d'une variable complexe

Définition II.8 (Espérance). *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que X admet une espérance finie si la famille $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas :*

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x).$$

La notation $X\in L^1$ signifie que X admet une espérance finie.

Remarque II.9 (15.2.9). *Il arrive souvent que l'ensemble dénombrable $X(\Omega)$ soit énuméré, c'est-à-dire décrit sous forme d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La condition d'existence d'une espérance finie équivaut dans ce cas à la convergence absolue de la série $\sum x_n\mathbb{P}(X=x_n)$.*
On prendra garde au fait que la semi-convergence n'est pas suffisante pour assurer la sommabilité. En effet, comme on l'a vu, la valeur de la somme est dans ce cas fortement dépendante de l'ordre de sommation. Or l'ordre de sommation défini par l'énumération $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est purement arbitraire, et n'a pas de raison d'être privilégié par rapport à un autre.

Exemple II.10 (15.2.10).

$$X(\Omega)=\{(-1)^n n, n\in\mathbb{N}^*\}, \text{et } : \forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=(-1)^n n)=\frac{6}{\pi^2 n^2}.$$

Remarque II.11 (15.2.11). *Lorsque $X\geqslant 0$, $X\in L^1 \iff \mathbb{E}(X)<+\infty$.*
En revanche, lorsque X n'est pas positive, cela n'a pas de sens de donner une valeur infinie à $\mathbb{E}(X)$. Comme dans le cas positif, on peut comparer l'espérance de deux variables de même loi.

Proposition II.12 (Espérance de variables de même loi). *Soit $X\sim Y$ deux variables discrètes à valeurs complexes de même loi. Alors :*
- X admet une espérance finie si Y admet une espérance finie; - dans ce cas, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$.

II.3 Formule de transfert et conséquences

Théorème II.13 (Formule de transfert, version positive). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : X(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, l'égalité suivante est toujours valide :*

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Éléments de preuve. Partir de l'espérance de $f(X)$, et, par propriété d'associativité positive, regrouper les valeurs de x selon les parties $\{f(X)=y\}$. □

Théorème II.14 (Formule de transfert, version complexe). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : X(\Omega)\to\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $f(X)\in L^1$; (ii) $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Exemple II.15 (15.2.15). *Si X est une variable discrète réelle. En cas de sommabilité,*

$$\mathbb{E}(X^k)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^k\mathbb{P}(X=x).$$

On dit dans ce cas que $X\in L^k$, et $\mathbb{E}(X^k)$ est appelé moment d'ordre k de X.

Remarque II.16 (15.2.16). *Si (X,Y) est un couple de variables aléatoires définies sur E et F respectivement, et $f : E \times F \to \mathbb{C}$, on peut considérer (X,Y) comme une variable aléatoire à valeurs dans $E \times F$, ce qui permet d'utiliser la formule de transfert : $f(X,Y)$ admet une espérance finie si $(f(x,y)\mathbb{P}(X=x,Y=y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas,*

$$\mathbb{E}(f(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x,y)\mathbb{P}(X=x,Y=y).$$

La formule de transfert permet d'obtenir des propriétés importantes de l'espérance.

Proposition II.17 (Inégalité triangulaire). *Soit X une variable aléatoire à valeurs complexes. Alors*

$$X \in L^1 \iff \mathbb{E}(|X|) < +\infty,$$

et dans ce cas,

$$|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|).$$

Proposition II.18 (Linéarité de $\mathbb{E}$, cas positif). *Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$,*

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Proposition II.19 (Linéarité de $\mathbb{E}$, cas complexe). *Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $X \in L^1$ et $Y \in L^1$, alors $\lambda X + Y \in L^1$ et dans ce cas,*

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Éléments de preuve. Théorème de transfert, appliqué à $f : (x,y) \mapsto \lambda x + y$, puis manipulations simples de somme et expression des lois marginales en fonction de la loi conjointe. □

La propriété de positivité de la proposition suivante a déjà été démontrée.

Proposition II.20 (Positivité et croissance de l'espérance). *1. Soit (X,Y) deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors, dans $\mathbb{R}_+$,*

$$X \leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y).$$

2. Soit $X, Y \in L^1$ deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance.
Si $X \geqslant 0$ ps, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$, avec égalité ssi $X = 0$ ps.
Si $X \geqslant Y$ ps, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.

Éléments de preuve. Dire que $X \geqslant Y$ ps signifie qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ et $\forall \omega \in \Omega'$, $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$. □

Corollaire II.21 (L^1 par majoration). *Soit X et Y deux variables à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $|X| \leqslant |Y|$ et $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.*

Proposition II.22 (Espérance d'un produit de variables indépendantes). *Soit X et Y deux variables à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si X et Y sont L^1, alors $XY \in L^1$ et*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Par récurrence immédiate, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes et L^1, alors $X_1 \cdots X_n$ est aussi L^1, et

$$\mathbb{E}(X_1 \dots X_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

II.4 Moment d'ordre 2 et variance d'une variable réelle

Dans ce paragraphe et le suivant, les variables aléatoires sont discrètes et réelles.
Comme dans le cas des variables finies, la valeur moyenne n'est pas une donnée suffisante pour avoir une bonne compréhension d'une variable aléatoire. En effet, l'espérance ne mesure pas la dispersion de la variable aléatoire : les valeurs prises peuvent tout aussi bien rester toujours très proches de $\mathbb{E}(X)$, ou alors s'en éloigner beaucoup, de part et d'autre, de façon à ce qu'en moyenne cela se compense.
Pour des raisons techniques, il est plus facile de travailler avec la moyenne quadratique $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ de la distance à $\mathbb{E}(X)$, plutôt que la moyenne arithmétique $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$. En effet, ce choix nous ramène à des méthodes bilinéaires.
On a déjà défini les moments d'ordre k. Les seuls au programme sont les moments d'ordre 1 (l'espérance) et 2.

Définition II.23 (Moment d'ordre 2)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle discrète.*
- Le moment d'ordre 2 de X est l'espérance de X^2. Ce moment d'ordre 2 est toujours bien défini dans $\mathbb{R}_+$.
- Ainsi, d'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x).$$

- On dit que X admet un moment d'ordre 2 fini (et on note $X \in L^2$) si $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$.

Proposition II.24 (Espace des variables L^2 sur Ω)**.** *1. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur Ω. Si X et Y sont dans L^2, alors $XY \in L^1$.*
2. L'ensemble $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ des variables aléatoires définies sur Ω et admettant un moment d'ordre 2 fini est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Corollaire II.25 (Espérance d'une variable L^2)**.** *Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si $X \in L^2$, alors $X \in L^1$.*

Éléments de preuve. Prendre $Y = 1$. □

Théorème II.26 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance)**.** *- Pour toutes variables aléatoires réelles discrètes X et Y dans L^2,*

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

- Dans l'inégalité précédente, le cas d'égalité est obtenu si et seulement si X et Y sont colinéaires presque sûrement, donc s'il existe des constantes λ et μ réelles telles que $\lambda X + \mu Y \sim 0$.

Éléments de preuve. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la forme bilinéaire symétrique positive $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$ définie sur $L^2(\Omega, \mathbb{R})$.
On rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme bilinéaire symétrique positive ϕ peut être obtenue sans l'hypothèse de séparation, et que le cas d'égalité est alors obtenu pour le couple (x, y) si et seulement s'il existe λ et μ tels que $\phi(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = 0$. □

Afin d'alléger les énoncés, nous ne rappelons plus par la suite à chaque fois que les variables considérées sont réelles discrètes (ce que nous sous-entendrons par l'écriture $X \in L^2$ que nous n'avons définie que dans ce cas).