II.2 Espérance d'une variable complexe

Définition II.8 (Espérance). *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que X admet une espérance finie si la famille $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas :*

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x).$$

La notation $X\in L^1$ signifie que X admet une espérance finie.

Remarque II.9 (15.2.9). *Il arrive souvent que l'ensemble dénombrable $X(\Omega)$ soit énuméré, c'est-à-dire décrit sous forme d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La condition d'existence d'une espérance finie équivaut dans ce cas à la convergence absolue de la série $\sum x_n\mathbb{P}(X=x_n)$.*
On prendra garde au fait que la semi-convergence n'est pas suffisante pour assurer la sommabilité. En effet, comme on l'a vu, la valeur de la somme est dans ce cas fortement dépendante de l'ordre de sommation. Or l'ordre de sommation défini par l'énumération $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est purement arbitraire, et n'a pas de raison d'être privilégié par rapport à un autre.

Exemple II.10 (15.2.10).

$$X(\Omega)=\{(-1)^n n, n\in\mathbb{N}^*\}, \text{et } : \forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=(-1)^n n)=\frac{6}{\pi^2 n^2}.$$

Remarque II.11 (15.2.11). *Lorsque $X\geqslant 0$, $X\in L^1 \iff \mathbb{E}(X)<+\infty$.*
En revanche, lorsque X n'est pas positive, cela n'a pas de sens de donner une valeur infinie à $\mathbb{E}(X)$. Comme dans le cas positif, on peut comparer l'espérance de deux variables de même loi.

Proposition II.12 (Espérance de variables de même loi). *Soit $X\sim Y$ deux variables discrètes à valeurs complexes de même loi. Alors :*
- X admet une espérance finie si Y admet une espérance finie; - dans ce cas, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$.

II.3 Formule de transfert et conséquences

Théorème II.13 (Formule de transfert, version positive). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : X(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, l'égalité suivante est toujours valide :*

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Éléments de preuve. Partir de l'espérance de $f(X)$, et, par propriété d'associativité positive, regrouper les valeurs de x selon les parties $\{f(X)=y\}$. □

Théorème II.14 (Formule de transfert, version complexe). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : X(\Omega)\to\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $f(X)\in L^1$; (ii) $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Exemple II.15 (15.2.15). *Si X est une variable discrète réelle. En cas de sommabilité,*

$$\mathbb{E}(X^k)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^k\mathbb{P}(X=x).$$

On dit dans ce cas que $X\in L^k$, et $\mathbb{E}(X^k)$ est appelé moment d'ordre k de X.