Corollaire I.35 (Modélisation d'une répétition infinie d'expériences indépendantes)**.** *Soit P une loi de probabilités discrète sur E. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables de loi P.*

En appliquant cela à une loi de Bernoulli $B(p)$, on obtient l'existence d'un espace probabilisé modélisant une succession infinie de tirages (éventuellement déséquilibrés) à Pile ou Face.

Corollaire I.36 (Espace probabilisé modélisant des tirages à P/F)**.** *Il existe un espace probabilisé modélisant une succession infinie de tirages à Pile ou Face indépendants, avec une probabilité p d'obtenir Pile à chaque tirage.*

II. Espérance et variance

On étend les définitions vues en première année au cas des variables discrètes. Dans toute cette section, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé qu'on ne réintroduira pas à chaque énoncé ; sauf mention explicite du contraire, les variables sont définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Espérance d'une variable positive

Définition II.1 (Espérance d'une variable positive)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. L'espérance de X est définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x),$$

où, par convention, $+\infty \times 0 = 0$. L'espérance est toujours bien définie dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Remarque II.2 (15.2.2)**.** *Si $+\infty \in X(\Omega)$: si $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, alors $\mathbb{E}(X) = +\infty$; si $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$, alors X a même espérance que sa restriction à $\Omega' = \Omega\backslash\{X = +\infty\}$.*

Plus généralement,

Proposition II.3 (Espérance de variables de même loi)**.** *Si X et Y sont des variables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, et $X \sim Y$, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.*

Remarque II.4 (15.2.4)**.** *Une variable aléatoire X positive peut admettre une espérance infinie même si X ne prend que des valeurs finies.*

Exemple II.5 (15.2.5)**.**

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}.$$

Proposition II.6 (Positivité et stricte positivité)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*
1. $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ 2. $\mathbb{E}(X) = 0 \iff X \sim 0$ (i.e. X est presque sûrement nulle).

Dans le cas de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dispose d'une autre description possible de $\mathbb{E}(X)$.

Proposition II.7 (Réexpression de l'espérance lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$)**.** *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n).$$

II.2 Espérance d'une variable complexe

Définition II.8 (Espérance). *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que X admet une espérance finie si la famille $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas :*

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x).$$

La notation $X\in L^1$ signifie que X admet une espérance finie.

Remarque II.9 (15.2.9). *Il arrive souvent que l'ensemble dénombrable $X(\Omega)$ soit énuméré, c'est-à-dire décrit sous forme d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La condition d'existence d'une espérance finie équivaut dans ce cas à la convergence absolue de la série $\sum x_n\mathbb{P}(X=x_n)$.*
On prendra garde au fait que la semi-convergence n'est pas suffisante pour assurer la sommabilité. En effet, comme on l'a vu, la valeur de la somme est dans ce cas fortement dépendante de l'ordre de sommation. Or l'ordre de sommation défini par l'énumération $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est purement arbitraire, et n'a pas de raison d'être privilégié par rapport à un autre.

Exemple II.10 (15.2.10).

$$X(\Omega)=\{(-1)^n n, n\in\mathbb{N}^*\}, \text{et } : \forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=(-1)^n n)=\frac{6}{\pi^2 n^2}.$$

Remarque II.11 (15.2.11). *Lorsque $X\geqslant 0$, $X\in L^1 \iff \mathbb{E}(X)<+\infty$.*
En revanche, lorsque X n'est pas positive, cela n'a pas de sens de donner une valeur infinie à $\mathbb{E}(X)$. Comme dans le cas positif, on peut comparer l'espérance de deux variables de même loi.

Proposition II.12 (Espérance de variables de même loi). *Soit $X\sim Y$ deux variables discrètes à valeurs complexes de même loi. Alors :*
- X admet une espérance finie si Y admet une espérance finie; - dans ce cas, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$.

II.3 Formule de transfert et conséquences

Théorème II.13 (Formule de transfert, version positive). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : X(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, l'égalité suivante est toujours valide :*

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Éléments de preuve. Partir de l'espérance de $f(X)$, et, par propriété d'associativité positive, regrouper les valeurs de x selon les parties $\{f(X)=y\}$. □

Théorème II.14 (Formule de transfert, version complexe). *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E et $f : X(\Omega)\to\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $f(X)\in L^1$; (ii) $(f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x).$$

Exemple II.15 (15.2.15). *Si X est une variable discrète réelle. En cas de sommabilité,*

$$\mathbb{E}(X^k)=\sum_{x\in X(\Omega)} x^k\mathbb{P}(X=x).$$

On dit dans ce cas que $X\in L^k$, et $\mathbb{E}(X^k)$ est appelé moment d'ordre k de X.