I.5 Loi d'un vecteur aléatoire réel discret

Proposition I.18 (Caractérisation d'un vecteur aléatoire par ses coordonnées)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application. On note $X = (X_1, \ldots, X_n)$ les coordonnées de X. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) X est une variable aléatoire discrète (donc un vecteur aléatoire discret) (ii) pour tout $i \in [1, n]$, X_i est une variable aléatoire réelle discrète.

Remarque I.19 (Notation 15.1.22 - $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n)$)**.** *Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour alléger les notations, on note $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n)$ au lieu de $\mathbb{P}([[X_1 \in A_1] \cap \cdots \cap \{X_n \in A\}])$. En particulier, on utilisera la notation $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$.*

Pour éviter l'abus de notations techniques stériles, nous donnons les définitions dans le cas de couples de variables aléatoires, elles s'étendent facilement au cas de vecteurs aléatoires à davantage de coordonnées. Pour commencer, on peut remarquer que si (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles discrètes, et $V = (X, Y)$, alors

$$V(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Définition I.20 (Loi conjointe, lois marginales)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.*
La loi conjointe du couple (X, Y) est la loi du vecteur aléatoire $V = (X, Y)$. Il s'agit donc d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}(X, Y)$ définie par la distribution de probabilités

$$(\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

La première loi marginale du couple (X, Y) est la loi de X.
La seconde loi marginale du couple (X, Y) est la loi de Y.
De la même façon, on parle de la loi conjointe, et de la k-ième loi marginale d'un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.

De façon évidente :

Proposition I.21 (Expression d'une loi marginale)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. La loi conjointe détermine les lois marginales par les formules :*

$$\begin{cases} \forall x \in X(\Omega), & \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y). \\ \forall y \in Y(\Omega), & \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y). \end{cases}$$

De façon similaire, la k-ième loi marginale d'un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ s'obtient en sommant sur toutes les valeurs possibles prises par les $n - 1$ autres variables aléatoires.

Remarque I.22 (Avertissement 15.1.25)**.** *Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe, mais la réciproque est fausse : les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe!*

Exemple I.23 (15.1.26)**.** *Soit une urne contenant 1 boule blanche, 1 boule noire. On effectue un tirage, avec équiprobabilité. On note X_1, Y_1 et X_2 les trois variables (égales l'une à l'autre) égales à 1 si on tire la boule noire, et 0 sinon. On note Y_2 la variable égale à 1 si on tire la boule blanche, et 0 sinon. Alors, les lois marginales de (X_1, Y_1) et de (X_2, Y_2) sont les mêmes, pourtant les lois conjointes sont distinctes.*

I.6 Variables indépendantes

Proposition I.24 (Variables aléatoires discrètes indépendantes)**.** *Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans E_1 et E_2 respectivement. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}(E_2)$ $\mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times B) = \mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_Y(B)$
(ii) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}(E_2)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, i.e.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B);$$

(iii) Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, i.e.

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y);$$

Dans ce cas, on dit que X et Y sont indépendantes, et on note $X \perp Y$.

Remarque I.25 (15.1.28)**.** *Conformément à la remarque faite lors de la définition de la loi d'une variable aléatoire, on peut se contenter de considérer $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$.*

Proposition I.26 (Famille de variables mutuellement indépendantes)**.** *Soit $(X_k)_{k\in K}$ une famille quelconque de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, X_k étant à valeurs dans E_k. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) pour toute famille $(A_k)_{k\in K}$ telle que pour tout $k \in K$, $A_k \subset E_k$, les événements $[X_k \in A_k]$, $k \in K$, sont indépendants;
(ii) pour tout $J \in \mathcal{P}_f(K)$ et toute famille $(A_j)_{j\in J}$ telle que pour tout $j \in J$, $A_j \subset E_j$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j \in A_j\}\right) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j \in A_j);$$

(iii) pour toute famille $(x_k)_{k\in K}$ telle que pour tout $k \in K$, $x_k \in X_k(\Omega)$, les événements $\{X_k = x_k\}$, $k \in K$, sont indépendants ;
(iv) pour tout $J \in \mathcal{P}_f(K)$ et toute famille $(x_j)_{j\in J}$ telle que pour tout $j \in J$, $x_j \in X_j(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j = x_j\}\right) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(\{X_j = x_j\}).$$

Dans ce cas, on dit que les variables aléatoires X_k, $k \in K$, sont indépendantes (ou mutuellement indépendantes).

Proposition I.27 (Sous-famille d'une famille de variables indépendantes)**.** *Si la famille $(X_k)_{k\in K}$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes, alors, pour tout $J \subset K$, $(X_j)_{j\in J}$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.*

Corollaire I.28 (Indépendance 2 à 2)**.** *Si $(X_k)_{k\in K}$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes, alors les X_k sont 2 à 2 indépendants. La réciproque est fausse.*

En revanche, on peut caractériser l'indépendance par l'indépendance des sous-familles finies.

Proposition I.29 (Caractérisation de l'indépendance par les familles finies)**.** *Soit $(X_k)_{k\in K}$ une famille de variables aléatoires discrètes. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) $(X_k)_{k\in K}$ est une famille de variables indépendantes ; (ii) pour tout $J \in \mathcal{P}_f(K)$, $(X_j)_{j\in J}$ est une famille de variables indépendantes.

Proposition I.30 (Fonctions de variables indépendantes)**.** *Soit $X \perp Y$ deux v.a.r.d. indépendantes, et f et g deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Alors $f(X) \perp g(Y)$.*