Remarque I.15 (Notation 15.1.15 - Variables de même loi)**.** *On note $X \sim Y$ pour désigner le fait que X et Y suivent la même loi.*
Plus précisément, étant données deux variables aléatoires $X : \Omega_1 \to E$ et $Y : \Omega_2 \to E$, définies sur les espaces probabilisés $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mathbb{P}_2)$, $X \sim Y$ si et seulement si les mesures $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ définies sur E vérifient

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y.$$

1. Contrairement à l'exemple précédent, la relation $X \sim Y$ ne nécessite pas que X et Y soient définis sur le même espace probabilisé. 2. La relation $\sim$ est clairement réflexive, symétrique et transitive. Mais dans le cadre du programme, il est un peu abusif d'en déduire que c'est une relation d'équivalence, car son « domaine » de définition n'est pas très bien défini. Il n'est pas clair que l'ensemble des variables aléatoires discrètes soit bien un ensemble, car, même en fixant E, la relation nécessite de faire varier Ω. Or, la collection des ensembles n'est pas un ensemble.

On peut bien évidemment aussi définir des lois conditionnelles. En effet, la définition d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ n'implique que l'espace probabilisable (Ω, T), et non l'espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P})$. Ainsi, étant donné un événement $B \in T$, on peut munir (Ω, T) de la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$ et définir la loi de la variable X en référence à l'espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P}_B)$. Concrètement, la loi conditionnelle de X est donc définie par la distribution de probabilités

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}_{B,X}(x) = \mathbb{P}_B(X = x).$$

I.3 Loi de $f(X)$

Proposition I.16 (Loi de $f(X)$)**.** *1. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, T, \mathbb{P})$, à valeurs dans E, et $f : E \to F$. La loi de $f(X)$, définie sur $(F, \mathcal{P}(F))$ (ou seulement sur $(f(X(\Omega)), \mathcal{P}(f(X(\Omega))))$, est donnée par*

$$\mathbb{P}_{f(X)} = \mathbb{P}_X \circ \widehat{f^{-1}}.$$

Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$

$$\mathbb{P}_{f(X)}(A) = \mathbb{P}_X(f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)).$$

2. En particulier,

$$\forall x \in f(X(\Omega)), \mathbb{P}(f(X) = x) = \sum_{\substack{\mathrm{w} | f(y) = x \\ y \in X(\Omega)}} \mathbb{P}(X = y).$$

Éléments de preuve. 1. $\{X \in f^{-1}(A)\} = \{f(X) \in A\}$
2. $\{f(X) = x\} = \{X \in f^{-1}(x)\}$ □

I.4 Exemples 15.1.19 - Loi d'une somme, loi du minimum

Voici deux exemples particulièrement importants, à bien connaître, dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires réelles discrètes.

$$1.\ \forall z \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}(X = x,\ Y = y).$$

$$2.\ \forall z \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\min(X, Y) = z) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y > z}} \mathbb{P}(X = z,\ Y = y) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x > z}} \mathbb{P}(X = x,\ Y = z) + \mathbb{P}(X = z,\ Y = z).$$

Corollaire I.17 (Stabilité de $\sim$ par image directe)**.** *Soit $X : \Omega_1 \to E$ et $Y : \Omega_2 \to E$ telles que $X \sim Y$, et $f : E \to F$. Alors $f(X) \sim f(Y)$.*

I.5 Loi d'un vecteur aléatoire réel discret

Proposition I.18 (Caractérisation d'un vecteur aléatoire par ses coordonnées)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application. On note $X = (X_1, \ldots, X_n)$ les coordonnées de X. Les propositions suivantes sont équivalentes:*
(i) X est une variable aléatoire discrète (donc un vecteur aléatoire discret) (ii) pour tout $i \in [1, n]$, X_i est une variable aléatoire réelle discrète.

Remarque I.19 (Notation 15.1.22 - $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n)$)**.** *Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour alléger les notations, on note $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n)$ au lieu de $\mathbb{P}([[X_1 \in A_1] \cap \cdots \cap \{X_n \in A\}])$. En particulier, on utilisera la notation $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$.*

Pour éviter l'abus de notations techniques stériles, nous donnons les définitions dans le cas de couples de variables aléatoires, elles s'étendent facilement au cas de vecteurs aléatoires à davantage de coordonnées. Pour commencer, on peut remarquer que si (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles discrètes, et $V = (X, Y)$, alors

$$V(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Définition I.20 (Loi conjointe, lois marginales)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.*
La loi conjointe du couple (X, Y) est la loi du vecteur aléatoire $V = (X, Y)$. Il s'agit donc d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}(X, Y)$ définie par la distribution de probabilités

$$(\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

La première loi marginale du couple (X, Y) est la loi de X.
La seconde loi marginale du couple (X, Y) est la loi de Y.
De la même façon, on parle de la loi conjointe, et de la k-ième loi marginale d'un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$.

De façon évidente :

Proposition I.21 (Expression d'une loi marginale)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. La loi conjointe détermine les lois marginales par les formules :*

$$\begin{cases} \forall x \in X(\Omega), & \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y). \\ \forall y \in Y(\Omega), & \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y). \end{cases}$$

De façon similaire, la k-ième loi marginale d'un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ s'obtient en sommant sur toutes les valeurs possibles prises par les $n - 1$ autres variables aléatoires.

Remarque I.22 (Avertissement 15.1.25)**.** *Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe, mais la réciproque est fausse : les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe!*

Exemple I.23 (15.1.26)**.** *Soit une urne contenant 1 boule blanche, 1 boule noire. On effectue un tirage, avec équiprobabilité. On note X_1, Y_1 et X_2 les trois variables (égales l'une à l'autre) égales à 1 si on tire la boule noire, et 0 sinon. On note Y_2 la variable égale à 1 si on tire la boule blanche, et 0 sinon. Alors, les lois marginales de (X_1, Y_1) et de (X_2, Y_2) sont les mêmes, pourtant les lois conjointes sont distinctes.*