Remarque I.15 (Notation 15.1.15 - Variables de même loi)**.** *On note $X \sim Y$ pour désigner le fait que X et Y suivent la même loi.*
Plus précisément, étant données deux variables aléatoires $X : \Omega_1 \to E$ et $Y : \Omega_2 \to E$, définies sur les espaces probabilisés $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mathbb{P}_2)$, $X \sim Y$ si et seulement si les mesures $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ définies sur E vérifient

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y.$$

1. Contrairement à l'exemple précédent, la relation $X \sim Y$ ne nécessite pas que X et Y soient définis sur le même espace probabilisé. 2. La relation $\sim$ est clairement réflexive, symétrique et transitive. Mais dans le cadre du programme, il est un peu abusif d'en déduire que c'est une relation d'équivalence, car son « domaine » de définition n'est pas très bien défini. Il n'est pas clair que l'ensemble des variables aléatoires discrètes soit bien un ensemble, car, même en fixant E, la relation nécessite de faire varier Ω. Or, la collection des ensembles n'est pas un ensemble.

On peut bien évidemment aussi définir des lois conditionnelles. En effet, la définition d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ n'implique que l'espace probabilisable (Ω, T), et non l'espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P})$. Ainsi, étant donné un événement $B \in T$, on peut munir (Ω, T) de la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$ et définir la loi de la variable X en référence à l'espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P}_B)$. Concrètement, la loi conditionnelle de X est donc définie par la distribution de probabilités

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}_{B,X}(x) = \mathbb{P}_B(X = x).$$

I.3 Loi de $f(X)$

Proposition I.16 (Loi de $f(X)$)**.** *1. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, T, \mathbb{P})$, à valeurs dans E, et $f : E \to F$. La loi de $f(X)$, définie sur $(F, \mathcal{P}(F))$ (ou seulement sur $(f(X(\Omega)), \mathcal{P}(f(X(\Omega))))$, est donnée par*

$$\mathbb{P}_{f(X)} = \mathbb{P}_X \circ \widehat{f^{-1}}.$$

Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$

$$\mathbb{P}_{f(X)}(A) = \mathbb{P}_X(f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)).$$

2. En particulier,

$$\forall x \in f(X(\Omega)), \mathbb{P}(f(X) = x) = \sum_{\substack{\mathrm{w} | f(y) = x \\ y \in X(\Omega)}} \mathbb{P}(X = y).$$

Éléments de preuve. 1. $\{X \in f^{-1}(A)\} = \{f(X) \in A\}$
2. $\{f(X) = x\} = \{X \in f^{-1}(x)\}$ □

I.4 Exemples 15.1.19 - Loi d'une somme, loi du minimum

Voici deux exemples particulièrement importants, à bien connaître, dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires réelles discrètes.

$$1.\ \forall z \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}(X = x,\ Y = y).$$

$$2.\ \forall z \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\min(X, Y) = z) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y > z}} \mathbb{P}(X = z,\ Y = y) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x > z}} \mathbb{P}(X = x,\ Y = z) + \mathbb{P}(X = z,\ Y = z).$$

Corollaire I.17 (Stabilité de $\sim$ par image directe)**.** *Soit $X : \Omega_1 \to E$ et $Y : \Omega_2 \to E$ telles que $X \sim Y$, et $f : E \to F$. Alors $f(X) \sim f(Y)$.*