Éléments de preuve. $f(X)^{-1}(\{y\})$ est une union au plus dénombrable de $X^{-1}(\{x\})$. $f : X(\Omega) \to f(X)(\Omega)$ est une surjection, et $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. □

On en déduit :

Proposition I.9 (Algèbre des v.a.r.d.). *Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^\Omega$ constitué des variables aléatoires réelles discrètes est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^\Omega$. Ainsi, si X et Y deux v.a.r.d. sur Ω, λ un réel quelconque :*
1. 1 est une v.a.r.d. 2. $X+Y$ est une v.a.r.d. 3. λX est une v.a.r.d. 4. XY est une v.a.r.d.
De plus, si X est une v.a.r.d., il en est de même de $|X|$.

Éléments de preuve. 2 et 4 s'obtiennent en composant (X, Y) par la somme ou le produit. □

I.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans E. Par définition, $\{X = x\}$ est un événement, donc $\mathbb{P}(X = x)$ est donc bien défini.

Proposition I.10. *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E. Alors - la famille $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE d'événements; - la famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités.*

Éléments de preuve. Le premier point est de la vérification facile (c'est en fait la partition associée à une surjection). Le deuxième point est la σ-additivité utilisée sur le SCE précédent. □

Définition I.11 (Loi d'une variable aléatoire discrète). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. La loi de X est la mesure de probabilité définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.*

Remarque I.12 (15.1.12). *Au besoin, il est possible de définir $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $(F, \mathcal{P}(F))$, pour tout ensemble F tel que $X(\Omega) \subset F$, en prolongeant la mesure de probabilité $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$, en posant*

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), \mathbb{P}(A) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x).$$

Cela permet par exemple de définir $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{P}(E))$ tout entier.

Proposition I.13 (Expression de la loi d'une v.a. discrète). *Soit $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x),$$

cette somme étant bien définie.

Éléments de preuve. Écrire A comme union de singletons. □

Remarque I.14 (15.1.14). *En définissant $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{P}(E))$, on peut plus généralement écrire*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x),$$

Remarque I.15 (Notation 15.1.15 - Variables de même loi)**.** *On note $X \sim Y$ pour désigner le fait que X et Y suivent la même loi.*
Plus précisément, étant données deux variables aléatoires $X : \Omega_1 \to E$ et $Y : \Omega_2 \to E$, définies sur les espaces probabilisés $(\Omega_1, \mathcal{T}_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}_2, \mathbb{P}_2)$, $X \sim Y$ si et seulement si les mesures $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ définies sur E vérifient

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y.$$

1. Contrairement à l'exemple précédent, la relation $X \sim Y$ ne nécessite pas que X et Y soient définis sur le même espace probabilisé. 2. La relation $\sim$ est clairement réflexive, symétrique et transitive. Mais dans le cadre du programme, il est un peu abusif d'en déduire que c'est une relation d'équivalence, car son « domaine » de définition n'est pas très bien défini. Il n'est pas clair que l'ensemble des variables aléatoires discrètes soit bien un ensemble, car, même en fixant E, la relation nécessite de faire varier Ω. Or, la collection des ensembles n'est pas un ensemble.

On peut bien évidemment aussi définir des lois conditionnelles. En effet, la définition d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ n'implique que l'espace probabilisable (Ω, T), et non l'espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P})$. Ainsi, étant donné un événement $B \in T$, on peut munir (Ω, T) de la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$ et définir la loi de la variable X en référence à l'espace probabilisé $(\Omega, T, \mathbb{P}_B)$. Concrètement, la loi conditionnelle de X est donc définie par la distribution de probabilités

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}_{B,X}(x) = \mathbb{P}_B(X = x).$$

I.3 Loi de $f(X)$

Proposition I.16 (Loi de $f(X)$)**.** *1. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, T, \mathbb{P})$, à valeurs dans E, et $f : E \to F$. La loi de $f(X)$, définie sur $(F, \mathcal{P}(F))$ (ou seulement sur $(f(X(\Omega)), \mathcal{P}(f(X(\Omega))))$, est donnée par*

$$\mathbb{P}_{f(X)} = \mathbb{P}_X \circ \widehat{f^{-1}}.$$

Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$

$$\mathbb{P}_{f(X)}(A) = \mathbb{P}_X(f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)).$$

2. En particulier,

$$\forall x \in f(X(\Omega)), \mathbb{P}(f(X) = x) = \sum_{\substack{\mathrm{w} | f(y) = x \\ y \in X(\Omega)}} \mathbb{P}(X = y).$$

Éléments de preuve. 1. $\{X \in f^{-1}(A)\} = \{f(X) \in A\}$
2. $\{f(X) = x\} = \{X \in f^{-1}(x)\}$ □

I.4 Exemples 15.1.19 - Loi d'une somme, loi du minimum

Voici deux exemples particulièrement importants, à bien connaître, dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires réelles discrètes.

$$1.\ \forall z \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}(X = x,\ Y = y).$$

$$2.\ \forall z \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(\min(X, Y) = z) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ y > z}} \mathbb{P}(X = z,\ Y = y) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x > z}} \mathbb{P}(X = x,\ Y = z) + \mathbb{P}(X = z,\ Y = z).$$

Corollaire I.17 (Stabilité de $\sim$ par image directe)**.** *Soit $X : \Omega_1 \to E$ et $Y : \Omega_2 \to E$ telles que $X \sim Y$, et $f : E \to F$. Alors $f(X) \sim f(Y)$.*