Dans ce chapitre, sauf mention contraire, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé quelconque.
La situation à laquelle vous serez le plus fréquemment confrontés est celle d'une variable aléatoire discrète à valeurs réelles (variable aléatoire réelle), ou à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (on parle de vecteur aléatoire, c'est équivalent à la donnée de n variables aléatoires réelles) mais on peut définir une variable aléatoire discrète à valeurs dans n'importe quel ensemble E.
La définition d'une variable aléatoire X générale (non discrète) dépasse en revanche le cadre du programme, et nécessite un cadre un peu plus précis : l'ensemble E dans lequel X prend ses valeurs doit lui-même être muni d'une tribu, et X doit vérifier une propriété de « mesurabilité », qui est en quelque sorte un respect des tribus, comme la continuité est le respect des topologies.

I. Loi d'une variable aléatoire discrète

I.1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

Définition I.1 (Variable aléatoire discrète)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une variable aléatoire discrète X à valeurs dans E est une application $X : \Omega \to E$ telle que :*
(i) $X(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs possibles de X) est au plus dénombrable; (ii) pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$.

Définition I.2 (Variables et vecteurs aléatoires réels discrets)**.** *- si $E = \mathbb{R}$ et X vérifie les conditions de la définition 15.1.1, on dit que X est une variable aléatoire réelle discrète (abrégé en v.a.r.d.) - si $E = \mathbb{R}^n$ et X vérifie les conditions de la définition 15.1.1, on dit que X est un vecteur aléatoire réel discret.*

Proposition I.3 (Image réciproque des parties de E)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète. Alors,*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), X^{-1}(A) \in \mathcal{T}.$$

Éléments de preuve. C'est la stabilité par union finie ou dénombrable, du fait que $X(\Omega) \cap A$ est fini ou dénombrable. □

Remarque I.4 (Notation 15.1.4 - Événements liés à une variable aléatoire)**.** *Soit (Ω, T) un espace probabilisable, et X une variable aléatoire à valeurs dans E.*
Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. L'événement $X^{-1}(A) \in \mathcal{T}$ est noté $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ ou encore $[X \in A]$.
Soit $x \in A$. L'événement $X^{-1}(\{x\}) = (X \in \{x\})$ sera simplement noté $(X = x)$, ou $\{X = x\}$ ou $[X = x]$.

Remarque I.5 (15.1.5)**.** *Les notations $(X \in A)$ et $\{X \in A\}$ figurent toutes deux dans le programme, contrairement à $[X \in A]$ qui est néanmoins largement présente dans beaucoup d'ouvrages (en particulier pour les événements $[X = x]$). Nous laisserons désormais de côté cette notation.*

Remarque I.6 (Notation 15.1.6 - Événements liés à une v.a.r.d.)**.** *Dans le cas d'une variable aléatoire réelle discrète,*
l'événement $\{\omega \mid X(\omega) < a\}$ est noté $(X < a)$ ou $\{X < a\}$
l'événement $\{\omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$ est noté $(X \leqslant a)$ ou $\{X \leqslant a\}$
l'événement $\{\omega \mid a < X(\omega) < b\}$ est noté $(a < X < b)$ ou $\{a < X < b\}$
l'événement $\{\omega \mid a < X(\omega) \leqslant b\}$ est noté $(a < X \leqslant b)$ ou $\{a < X \leqslant b\}$ etc.

Proposition I.7 (Stabilité par produit cartésien)**.** *Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires discrètes. Alors le couple (X, Y) est une variable aléatoire discrète.*

Proposition I.8 (Composition d'une variable aléatoire discrète)**.** *Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, T), à valeurs dans E, et f une application de $X(\Omega)$ dans un ensemble F. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète, notée $f(X)$.*

Éléments de preuve. $f(X)^{-1}(\{y\})$ est une union au plus dénombrable de $X^{-1}(\{x\})$. $f : X(\Omega) \to f(X)(\Omega)$ est une surjection, et $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. □

On en déduit :

Proposition I.9 (Algèbre des v.a.r.d.). *Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^\Omega$ constitué des variables aléatoires réelles discrètes est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^\Omega$. Ainsi, si X et Y deux v.a.r.d. sur Ω, λ un réel quelconque :*
1. 1 est une v.a.r.d. 2. $X+Y$ est une v.a.r.d. 3. λX est une v.a.r.d. 4. XY est une v.a.r.d.
De plus, si X est une v.a.r.d., il en est de même de $|X|$.

Éléments de preuve. 2 et 4 s'obtiennent en composant (X, Y) par la somme ou le produit. □

I.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, à valeurs dans E. Par définition, $\{X = x\}$ est un événement, donc $\mathbb{P}(X = x)$ est donc bien défini.

Proposition I.10. *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans E. Alors - la famille $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE d'événements; - la famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités.*

Éléments de preuve. Le premier point est de la vérification facile (c'est en fait la partition associée à une surjection). Le deuxième point est la σ-additivité utilisée sur le SCE précédent. □

Définition I.11 (Loi d'une variable aléatoire discrète). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. La loi de X est la mesure de probabilité définie sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.*

Remarque I.12 (15.1.12). *Au besoin, il est possible de définir $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $(F, \mathcal{P}(F))$, pour tout ensemble F tel que $X(\Omega) \subset F$, en prolongeant la mesure de probabilité $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$, en posant*

$$\forall A \in \mathcal{P}(F), \mathbb{P}(A) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x).$$

Cela permet par exemple de définir $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{P}(E))$ tout entier.

Proposition I.13 (Expression de la loi d'une v.a. discrète). *Soit $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x),$$

cette somme étant bien définie.

Éléments de preuve. Écrire A comme union de singletons. □

Remarque I.14 (15.1.14). *En définissant $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{P}(E))$, on peut plus généralement écrire*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x),$$