VI. Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Rappelons la définition de l'exponentielle d'un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, ainsi que la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{et} \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

L'équivalence des normes en dimension finie nous assure, grâce à une norme bien choisie, la convergence absolue des séries sous-jacentes, donc l'existence de l'exponentielle. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$, alors $\exp(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a))$. C'est peut-être une évidence, mais faisons observer que l'application $\exp(a)$ est bien linéaire.

Théorème VI.1 (Dérivation de $\exp(tA)$)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction vectorielle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto A \times \exp(tA)$.*

Lemme VI.2. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors A et $\exp(B)$ commutent.*

Proposition VI.3. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.*

Proposition VI.4. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors, $\exp(A)$ est diagonalisable et :*

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})P^{-1}.$$

Plus généralement, en trigonalisant, $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et on remarque que A et $\exp(A)$ partagent les mêmes vecteurs propres : si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,

$$AX = \lambda X \quad \textit{et} \quad \exp(A)X = e^{\lambda}X.$$

Exercice VI.5. *Calculer l'exponentielle des trois matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Exercice VI.6. *Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice VI.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Construire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.*