Exercice IV.8. *(i) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M\| < 1$ pour une certaine norme sous-multiplicative, $\sum M^k$ converge et préciser sa somme.*

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 1$, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que :

$$\forall r \geq R, \quad A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{k+1} \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} d\theta.$$

(iii) Retrouver le théorème de Cayley-Hamilton.

V. Théorèmes d'intégration sur un intervalle quelconque pour les fonctions vectorielles (HP)

Le théorème de convergence dominée s'étend sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée sur I si, et seulement si, pour tout $1 \leq k \leq d$, la suite $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des composantes est dominée sur I.

Théorème de convergence dominée
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux de I dans un espace vectoriel de dimension finie E.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et s'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall t \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(t)\|_E \leq g(t),$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \|f(t) - f_n(t)\|_E \, dt = 0$$

et en particulier

$$\int_I f_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\, dt.$$

On peut en déduire une condition suffisante pour qu'une intégrale varie continûment en fonction d'un paramètre.

Théorème de continuité
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour $(x,t) \in \Omega \times I$ et on suppose que :

- **Hypothèse de régularité**
  Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est continue sur Ω;
- **Hypothèse d'intégrabilité**
  Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I;
- **Hypothèse de domination**
  Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I telle que
  $$\forall t \in I, \quad \forall x \in V, \quad \|f(x,t)\|_E \leq g(t).$$

Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\, dt$$

est continue sur Ω.

Lorsque Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dispose d'une condition suffisante pour que cette intégrale soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Théorème de dérivation sous l'intégrale
Soient Ω et I, deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f, une fonction définie pour tout $(x,t) \in \Omega \times I$. On suppose que :

- **Hypothèse de régularité**
  Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω;
- **Hypothèse d'intégrabilité**
  Pour tout $x \in \Omega$, les fonctions
  $$[t \mapsto f(x,t)] \quad \text{et} \quad \left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$$
  sont intégrables sur I;
- **Hypothèse de domination**
  Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I tels que
  $$\forall x \in V, \quad \forall t \in I, \quad \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right\|_E \leq g(t).$$

Alors la fonction F définie sur Ω par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$\forall x \in V, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Bien entendu, ce résultat se généralise aux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout entier $n \geq 2$ et donc aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Intégration terme à terme
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions d'un intervalle I dans un espace vectoriel de dimension finie E qui converge simplement sur I. On suppose que :

- **Hypothèse d'intégrabilité**
  Les fonctions f_n sont intégrables sur I;
- **Hypothèse de régularité**
  La somme S de la série $\sum f_n$ est continue par morceaux sur I;
- **Hypothèse de domination**
  La série de terme général positif
  $$\sum \int_I \|f_n(t)\|_E\,dt$$
  est convergente.

Alors la somme $S : I \to E$ est intégrable sur I, la série $\sum \int_I f_n(t)\,dt$ est convergente et

$$\int_I S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

VI. Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice

Rappelons la définition de l'exponentielle d'un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, ainsi que la définition de l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \quad \text{et} \quad \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

L'équivalence des normes en dimension finie nous assure, grâce à une norme bien choisie, la convergence absolue des séries sous-jacentes, donc l'existence de l'exponentielle. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$, alors $\exp(A) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\exp(a))$. C'est peut-être une évidence, mais faisons observer que l'application $\exp(a)$ est bien linéaire.

Théorème VI.1 (Dérivation de $\exp(tA)$)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction vectorielle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto A \times \exp(tA)$.*

Lemme VI.2. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors A et $\exp(B)$ commutent.*

Proposition VI.3. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.*

Proposition VI.4. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors, $\exp(A)$ est diagonalisable et :*

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})P^{-1}.$$

Plus généralement, en trigonalisant, $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ et on remarque que A et $\exp(A)$ partagent les mêmes vecteurs propres : si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,

$$AX = \lambda X \quad \textit{et} \quad \exp(A)X = e^{\lambda}X.$$

Exercice VI.5. *Calculer l'exponentielle des trois matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Exercice VI.6. *Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice VI.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Construire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$.*