III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème III.3 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.*

Théorème III.4. *Pour toute fonction $f : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.*

Corollaire III.5 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leq M$, alors :*

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot |b - a|.$$

III.3 Formules de Taylor

Théorème III.6 (Formules de Taylor). *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a, x \in I$.*

(i) Formule de Taylor avec reste intégral *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(ii) Inégalité de Taylor-Lagrange *:*

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec } M = \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

(iii) Formule de Taylor-Young *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

IV. Suites et séries de fonctions vectorielles

Par la suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de fonctions $f_n : I \to E$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé supposé de dimension finie.

Définition IV.1 (Convergences simple et uniforme (suite de fonctions)).

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* simplement *vers la fonction f sur I si :*

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément *vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :*

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \sup_{x\in I} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in I, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème IV.2 (Continuité de la limite uniforme)**.** *La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions continues sur I est continue sur I.*

On considère désormais la série de fonctions $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont définies sur I et à valeurs dans E.

Définition IV.3 (Convergences simple, uniforme et normale)**.**

- *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* simplement *sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I. En cas de convergence, on appelle* fonction somme *de la série la fonction S définie par :*

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

- *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* uniformément *sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.*
- *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge* normalement *sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.*

Bien entendu, si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Théorème IV.4. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.*

Théorème IV.5 (Théorème de la double limite)**.** *Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E et a un point adhérent à I (ou $a = \pm\infty$). On suppose que :*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a.

(ii) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Théorème IV.6 (Dérivation terme à terme)**.** *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E. On suppose que :*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur I.

(iii) $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Théorème IV.7 (Intégration terme à terme sur un segment)**.** *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans E, convergeant uniformément sur le segment $[a,b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x)dx$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Exercice IV.8. *(i) Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M\| < 1$ pour une certaine norme sous-multiplicative, $\sum M^k$ converge et préciser sa somme.*

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geq 1$, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $R \geq 0$ tel que :

$$\forall r \geq R, \quad A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^{k+1} \left(re^{i\theta} I_n - A\right)^{-1} d\theta.$$

(iii) Retrouver le théorème de Cayley-Hamilton.

V. Théorèmes d'intégration sur un intervalle quelconque pour les fonctions vectorielles (HP)

Le théorème de convergence dominée s'étend sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction f. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée sur I si, et seulement si, pour tout $1 \leq k \leq d$, la suite $(f_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ des composantes est dominée sur I.

Théorème de convergence dominée
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions continues par morceaux de I dans un espace vectoriel de dimension finie E.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux f et s'il existe une fonction g intégrable sur I telle que

$$\forall t \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(t)\|_E \leq g(t),$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \|f(t) - f_n(t)\|_E \, dt = 0$$

et en particulier

$$\int_I f_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\, dt.$$

On peut en déduire une condition suffisante pour qu'une intégrale varie continûment en fonction d'un paramètre.

Théorème de continuité
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et I, un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie pour $(x,t) \in \Omega \times I$ et on suppose que :

- **Hypothèse de régularité**
  Pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est continue sur Ω;
- **Hypothèse d'intégrabilité**
  Pour tout $x \in \Omega$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I;
- **Hypothèse de domination**
  Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_\Omega(x_0)$ et une fonction g intégrable sur I telle que
  $$\forall t \in I, \quad \forall x \in V, \quad \|f(x,t)\|_E \leq g(t).$$

Alors la fonction F définie par

$$F(x) = \int_I f(x,t)\, dt$$

est continue sur Ω.