III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème III.3 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.*

Théorème III.4. *Pour toute fonction $f : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.*

Corollaire III.5 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leq M$, alors :*

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot |b - a|.$$

III.3 Formules de Taylor

Théorème III.6 (Formules de Taylor). *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a, x \in I$.*

(i) Formule de Taylor avec reste intégral *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(ii) Inégalité de Taylor-Lagrange *:*

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec } M = \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

(iii) Formule de Taylor-Young *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

IV. Suites et séries de fonctions vectorielles

Par la suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de fonctions $f_n : I \to E$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé supposé de dimension finie.

Définition IV.1 (Convergences simple et uniforme (suite de fonctions)).

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* simplement *vers la fonction f sur I si :*

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément *vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :*

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \sup_{x\in I} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in I, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$