II.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition II.13. *Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I.*

Exercice II.14. *Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathscr{C}^2$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition II.15 (Formule de Leibniz)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors*

$$(\lambda \cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

III. Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment

III.1 Définition et premières propriétés

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. de dimension p, il suffit d'intégrer les fonctions composantes (ce sont des fonctions numériques) dans une base prédéfinie :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i\right) dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

À condition bien entendu que le résultat ne dépende pas de la base choisie, ce que l'on admet !

Théorème III.1 (Intégrale d'une fonction vectorielle continue)**.** *Soit $f : [a, b] \to E$ continue sur $[a, b]$, où E est un e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, on l'appelle* intégrale de f sur $[a, b]$ *et on note :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

Théorème III.2 (Propriétés de l'intégrale)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to E$ deux fonctions continues où $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, avec $a < b$.*

(i) Linéarité de l'intégrale *: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

(ii) Relation de Chasles *: $\forall c \in [a, b]$,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

(iii) Convergence des sommes de Riemann *:*

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$

(iv) Inégalité triangulaire *:*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

III.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème III.3 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.*

Théorème III.4. *Pour toute fonction $f : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.*

Corollaire III.5 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leq M$, alors :*

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot |b - a|.$$

III.3 Formules de Taylor

Théorème III.6 (Formules de Taylor). *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a, x \in I$.*

(i) Formule de Taylor avec reste intégral *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

(ii) Inégalité de Taylor-Lagrange *:*

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec } M = \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

(iii) Formule de Taylor-Young *:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

IV. Suites et séries de fonctions vectorielles

Par la suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de fonctions $f_n : I \to E$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé supposé de dimension finie.

Définition IV.1 (Convergences simple et uniforme (suite de fonctions)).

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* simplement *vers la fonction f sur I si :*

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

- *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément *vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :*

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \sup_{x\in I} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in I, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$