II.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition II.13. *Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I.*

Exercice II.14. *Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathscr{C}^2$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition II.15 (Formule de Leibniz)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors*

$$(\lambda \cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

III. Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment

III.1 Définition et premières propriétés

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. de dimension p, il suffit d'intégrer les fonctions composantes (ce sont des fonctions numériques) dans une base prédéfinie :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i\right) dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

À condition bien entendu que le résultat ne dépende pas de la base choisie, ce que l'on admet !

Théorème III.1 (Intégrale d'une fonction vectorielle continue)**.** *Soit $f : [a, b] \to E$ continue sur $[a, b]$, où E est un e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, on l'appelle* intégrale de f sur $[a, b]$ *et on note :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

Théorème III.2 (Propriétés de l'intégrale)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to E$ deux fonctions continues où $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, avec $a < b$.*

(i) Linéarité de l'intégrale *: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

(ii) Relation de Chasles *: $\forall c \in [a, b]$,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

(iii) Convergence des sommes de Riemann *:*

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$

(iv) Inégalité triangulaire *:*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$