Exemple II.3. *L'application* $R : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $t \mapsto R'(t) = R(t + \pi/2)$.

Proposition II.4. *Toute application dérivable est continue.*

Éléments de preuve. Si f est dérivable en t_0, $f(t_0+h) = f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+o(h)$ donc $f(t_0+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(t_0)$. □

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition II.5 (Premières opérations). *Soient* $f, g : I \to E$ *deux fonctions dérivables sur* I.

(i) Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ *est dérivable sur* I *et* $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;

(ii) Si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable sur* I, $\lambda \cdot f$ *l'est également et* $(\lambda \cdot f)' = \lambda' \cdot f + \lambda \cdot f'$;

(iii) Si $\lambda : \mathbb{R} \to I$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, $f \circ \lambda$ *l'est également et* $(f \circ \lambda)' = \lambda' \cdot (f' \circ \lambda)$.

Attention, le produit $f \times g$ *a rarement un sens lorsque* $p \neq 1$.

Exercice II.6. *Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une application dérivable.*

(i) Établir la dérivabilité de $t \mapsto A(t)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et exprimer la dérivée.*

(ii) Supposons que $A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Même question avec* $t \mapsto A^{-1}(t)$.

Proposition II.7 (Dérivabilité et application linéaire). *Soient* $f : I \to E$ *une fonction dérivable sur* I *et* $u \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors* $u \circ f$ *est dérivable et* $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Éléments de preuve. Tout repose sur la linéarité (et donc la continuité de u en dimension finie). En effet,

$$\frac{u(f(t_0 + h)) - u(f(t_0))}{h} = u\left(\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} u(f'(t_0)).$$

On peut aussi écrire $u(f(t_0 + h)) = u(f(t_0)) + hu(f'(t_0)) + o(h)$ par continuité de u. □

Exemple II.8. *Si* $f : I \to \mathbb{C}$ *est dérivable sur* I, $\mathrm{Re}(f)$ *également. Si* $g : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dérivable sur* I, $\mathrm{Tr}(g)$ *également.*

Proposition II.9 (Dérivabilité et application bilinéaire). *Soient* $f : I \to F$ *et* $g : I \to G$ *deux fonctions dérivables sur* I *et* $B : F \times G \to E$ *bilinéaire. Alors,* $B(f, g)$ *est dérivable sur* I *et* $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Éléments de preuve. Travailons ici avec les développements limités. f et g sont supposées dérivables sur I donc pour tout $t_0 \in I$,

$$f(t_0 + h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h) \quad \text{et} \quad g(t_0 + h) \underset{h\to 0}{=} g(t_0) + h \cdot g'(t_0) + o(h).$$

Par bilinéarité de B, $B(f(t_0+h), g(t_0+h)) \underset{h\to 0}{=} B(f(t_0), g(t_0))+h[B(f'(t_0), g(t_0))+B(f(t_0), g'(t_0))]+o(h)$. C'est la continuité de B qui permet, par exemple, d'affirmer que $B(f(t_0), o(h)) = o(h)$. □

Exemple II.10. *Soient* $f, g : I \subset \mathbb{R} \to E$ *deux fonctions dérivables. Si* $E = \mathbb{R}^3$, $f \wedge g$ *est dérivable sur* I *et* $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$. *Si* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *désigne un produit scalaire sur* E, $\langle f | g \rangle$ *est dérivable sur* I *et* $\langle f | g \rangle' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle$.

Exercice II.11. *Si* E *est un espace euclidien et* f *dérivable,* $\|f\|$ *est constante si et seulement si le vecteur vitesse* f' *est orthogonal à* f *en tout point.*

Exercice II.12. *Calculer* $\Delta_n(x) = \det(A)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie par* $a_{i,j} = \frac{x^{i-j+1}}{(i-j+1)!}$ *si* $i \geq j - 1$, $a_{i,j} = 0$ *sinon.*

II.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition II.13. *Soit $k \in \mathbb{N}$. L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I.*

Exercice II.14. *Soit $f : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathscr{C}^2$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'application g définie par $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = f'(0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition II.15 (Formule de Leibniz)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors*

$$(\lambda \cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{(k)} f^{(n-k)}.$$

III. Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment

III.1 Définition et premières propriétés

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un e.v.n. de dimension p, il suffit d'intégrer les fonctions composantes (ce sont des fonctions numériques) dans une base prédéfinie :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i\right) dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

À condition bien entendu que le résultat ne dépende pas de la base choisie, ce que l'on admet !

Théorème III.1 (Intégrale d'une fonction vectorielle continue)**.** *Soit $f : [a, b] \to E$ continue sur $[a, b]$, où E est un e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$, on l'appelle* intégrale de f sur $[a, b]$ *et on note :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\,dt\right) e_i.$$

Théorème III.2 (Propriétés de l'intégrale)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to E$ deux fonctions continues où $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, avec $a < b$.*

(i) Linéarité de l'intégrale *: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

(ii) Relation de Chasles *: $\forall c \in [a, b]$,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

(iii) Convergence des sommes de Riemann *:*

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$

(iv) Inégalité triangulaire *:*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$