On appelle *fonction vectorielle d'une variable réelle* toute fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. En pratique, on considérera souvent des fonctions à valeurs dans $E = \mathbb{R}^p$, donc des fonctions de la forme :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad t \longmapsto (f_1(t), \ldots, f_p(t)).$$

Les fonctions numériques $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f. Plus généralement, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$. L'équivalence des normes en dimension finie nous assurera que les propriétés de régularité (comme la continuité et la dérivabilité) ne dépendent pas de la base choisie. Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie p.

I. Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Définition I.1 (Limite). *On dit que f admet $\ell \in E$ pour limite en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} \|f(t) - \ell\| = 0$, c'est-à-dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon.$$

On peut montrer que lorsque la limite existe, elle est unique. De plus, si $E = \mathbb{R}^p$, f admet $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ pour limite en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si chaque fonction composante f_i admet ℓ_i comme limite en t_0.

Définition I.2 (Continuité).

- *f est dite continue en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$, c'est-à-dire si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon.$$
- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Proposition I.3 (Continuité et fonctions composantes). *f est continue en $t_0 \in I$ si et seulement si f_i est continue en t_0 quel que soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.*

Exemple I.4. *L'application $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune des fonctions composantes l'est.*

II. Dérivabilité d'une fonction vectorielle

II.1 Dérivation en un point et sur un intervalle

Définition II.1 (Dérivabilité).

- *L'application f est dite dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe. On appelle alors* vecteur dérivé en t_0 *le vecteur $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ et on le note $f'(t_0)$.*
- *L'application f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et on appelle* dérivée de f *l'application $f' : t \mapsto f'(t)$.*

De manière équivalente, f dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ existe. En d'autres termes,

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0) + o(t - t_0) \quad \textit{i.e.} \quad f(t_0 + h) = f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h).$$

La dérivabilité de f se traduit également par la dérivabilité des fonctions composantes.

Proposition II.2. *Si E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$, alors f est dérivable si et seulement si les fonctions f_i le sont. Dans ce cas, $f' = f_1' e_1 + \cdots + f_p' e_p$.*

Exemple II.3. *L'application* $R : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $t \mapsto R'(t) = R(t + \pi/2)$.

Proposition II.4. *Toute application dérivable est continue.*

Éléments de preuve. Si f est dérivable en t_0, $f(t_0+h) = f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+o(h)$ donc $f(t_0+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(t_0)$. □

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition II.5 (Premières opérations). *Soient* $f, g : I \to E$ *deux fonctions dérivables sur* I.

(i) Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ *est dérivable sur* I *et* $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;

(ii) Si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ *est dérivable sur* I, $\lambda \cdot f$ *l'est également et* $(\lambda \cdot f)' = \lambda' \cdot f + \lambda \cdot f'$;

(iii) Si $\lambda : \mathbb{R} \to I$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, $f \circ \lambda$ *l'est également et* $(f \circ \lambda)' = \lambda' \cdot (f' \circ \lambda)$.

Attention, le produit $f \times g$ *a rarement un sens lorsque* $p \neq 1$.

Exercice II.6. *Soit* $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une application dérivable.*

(i) Établir la dérivabilité de $t \mapsto A(t)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et exprimer la dérivée.*

(ii) Supposons que $A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Même question avec* $t \mapsto A^{-1}(t)$.

Proposition II.7 (Dérivabilité et application linéaire). *Soient* $f : I \to E$ *une fonction dérivable sur* I *et* $u \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors* $u \circ f$ *est dérivable et* $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Éléments de preuve. Tout repose sur la linéarité (et donc la continuité de u en dimension finie). En effet,

$$\frac{u(f(t_0 + h)) - u(f(t_0))}{h} = u\left(\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} u(f'(t_0)).$$

On peut aussi écrire $u(f(t_0 + h)) = u(f(t_0)) + hu(f'(t_0)) + o(h)$ par continuité de u. □

Exemple II.8. *Si* $f : I \to \mathbb{C}$ *est dérivable sur* I, $\mathrm{Re}(f)$ *également. Si* $g : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dérivable sur* I, $\mathrm{Tr}(g)$ *également.*

Proposition II.9 (Dérivabilité et application bilinéaire). *Soient* $f : I \to F$ *et* $g : I \to G$ *deux fonctions dérivables sur* I *et* $B : F \times G \to E$ *bilinéaire. Alors,* $B(f, g)$ *est dérivable sur* I *et* $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$.

Éléments de preuve. Travailons ici avec les développements limités. f et g sont supposées dérivables sur I donc pour tout $t_0 \in I$,

$$f(t_0 + h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h) \quad \text{et} \quad g(t_0 + h) \underset{h\to 0}{=} g(t_0) + h \cdot g'(t_0) + o(h).$$

Par bilinéarité de B, $B(f(t_0+h), g(t_0+h)) \underset{h\to 0}{=} B(f(t_0), g(t_0))+h[B(f'(t_0), g(t_0))+B(f(t_0), g'(t_0))]+o(h)$. C'est la continuité de B qui permet, par exemple, d'affirmer que $B(f(t_0), o(h)) = o(h)$. □

Exemple II.10. *Soient* $f, g : I \subset \mathbb{R} \to E$ *deux fonctions dérivables. Si* $E = \mathbb{R}^3$, $f \wedge g$ *est dérivable sur* I *et* $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$. *Si* $\langle \cdot | \cdot \rangle$ *désigne un produit scalaire sur* E, $\langle f | g \rangle$ *est dérivable sur* I *et* $\langle f | g \rangle' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle$.

Exercice II.11. *Si* E *est un espace euclidien et* f *dérivable,* $\|f\|$ *est constante si et seulement si le vecteur vitesse* f' *est orthogonal à* f *en tout point.*

Exercice II.12. *Calculer* $\Delta_n(x) = \det(A)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie par* $a_{i,j} = \frac{x^{i-j+1}}{(i-j+1)!}$ *si* $i \geq j - 1$, $a_{i,j} = 0$ *sinon.*