On appelle *fonction vectorielle d'une variable réelle* toute fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. En pratique, on considérera souvent des fonctions à valeurs dans $E = \mathbb{R}^p$, donc des fonctions de la forme :

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad t \longmapsto (f_1(t), \ldots, f_p(t)).$$

Les fonctions numériques $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f. Plus généralement, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$. L'équivalence des normes en dimension finie nous assurera que les propriétés de régularité (comme la continuité et la dérivabilité) ne dépendent pas de la base choisie. Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie p.

I. Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Définition I.1 (Limite). *On dit que f admet $\ell \in E$ pour limite en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} \|f(t) - \ell\| = 0$, c'est-à-dire si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|f(t) - \ell\| < \varepsilon.$$

On peut montrer que lorsque la limite existe, elle est unique. De plus, si $E = \mathbb{R}^p$, f admet $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ pour limite en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si chaque fonction composante f_i admet ℓ_i comme limite en t_0.

Définition I.2 (Continuité).

- *f est dite continue en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$, c'est-à-dire si :*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| < \eta \Longrightarrow \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon.$$
- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Proposition I.3 (Continuité et fonctions composantes). *f est continue en $t_0 \in I$ si et seulement si f_i est continue en t_0 quel que soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.*

Exemple I.4. *L'application $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune des fonctions composantes l'est.*

II. Dérivabilité d'une fonction vectorielle

II.1 Dérivation en un point et sur un intervalle

Définition II.1 (Dérivabilité).

- *L'application f est dite dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe. On appelle alors* vecteur dérivé en t_0 *le vecteur $\lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ et on le note $f'(t_0)$.*
- *L'application f est dite dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et on appelle* dérivée de f *l'application $f' : t \mapsto f'(t)$.*

De manière équivalente, f dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ existe. En d'autres termes,

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0) + o(t - t_0) \quad \textit{i.e.} \quad f(t_0 + h) = f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + o(h).$$

La dérivabilité de f se traduit également par la dérivabilité des fonctions composantes.

Proposition II.2. *Si E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$, alors f est dérivable si et seulement si les fonctions f_i le sont. Dans ce cas, $f' = f_1' e_1 + \cdots + f_p' e_p$.*