III. Bilan des méthodes calculatoires en probabilités

Nous exposons ici le principe général du calcul (et de la rédaction de ce calcul) d'une probabilité. Évidemment, dans la pratique, les situations sont très variées, et on peut être amené à s'écarter légèrement de la voie tracée ci-dessous.

Méthode III.1 (Comment aborder un calcul de probabilité)**.**

1. *Si on est dans une situation d'équiprobabilité, on peut se diriger vers un argument combinatoire (et utiliser la formule de Laplace). Dans les autres cas, la démarche générale est indiquée ci-dessous.*
2. *Définir des événements simples issus de l'expérience décrite, en n'oubliant pas la numérotation de ces événements en cas d'expérience répétée. Ces événements simples auront pour vocation de décrire ceux qui nous intéressent. Il ne faut pas hésiter à introduire des événements par vous-même, à donner des notations. Ce travail n'est pas nécessairement fait pour vous dans le sujet.*
3. *Décrire à l'aide d'une phrase l'événement dont on recherche la probabilité, sous forme d'une condition nécessaire et suffisante de réalisation :*

   « L'événement A est réalisé si et seulement si ... »

   Cette condition nécessaire et suffisante de réalisation de l'événement A doit s'exprimer en fonction de la réalisation ou non des événements simples définis dans la première étape. Il s'agit donc de « décomposer » l'événement A en événements simples.
4. *Traduire cette description dans le langage ensembliste (c'est-à-dire sous forme d'union, intersection ou complémentaires d'événements élémentaires). Les deux étapes sont nécessaires : la première (description verbale) fournit une explication facilement lisible, et éclaire la formule, la seconde (description ensembliste) donne de la rigueur à l'argument, et permet ensuite de s'orienter vers la bonne méthode de calcul.*
5. *Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(A)$, en se servant de la décomposition ensembliste précédente, et des règles de calcul des probabilités d'unions, d'intersections ou de complémentaires. Nous rappelons l'essentiel de ces règles ci-dessous.*

Ainsi, il est important de savoir s'orienter rapidement vers la bonne technique de calcul (probabilité d'une union, d'une intersection), suivant la situation rencontrée. Voici les différents cas rencontrés les plus fréquemment :

Méthode III.2 (Calcul de la probabilité d'un complémentaire)**.** *Une seule formule à connaître, issue de la définition d'une mesure de probabilité :*

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Méthode III.3 (Calcul de la probabilité d'une intersection)**.** *Suivant les cas :*

- *Intersection dénombrable d'événements décroissants pour l'inclusion : On utilise le théorème de la limite monotone.*
- *Intersection d'un nombre fini d'événements mutuellement indépendants : On utilise la relation issue de la définition de l'indépendance mutuelle :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n).$$

- *Intersection d'un nombre fini d'événements non nécessairement indépendants : On utilise la formule des probabilités composées. Cette formule est surtout utile lorsqu'il y a un enchaînement*

temporel des événements (A_1 étant le premier à advenir, A_n le dernier), chaque résultat influant sur les suivants. C'est le cas par exemple dans le cadre de tirages successifs dans une urne évolutive, l'évolution se faisant différemment suivant la boule tirée à un tirage donné. Cette formule permet de formaliser le calcul de la probabilité associée à une branche de l'arbre des possibilités.

Méthode III.4 (Calcul de la probabilité d'une union)**.**

- *Union dénombrable d'événements croissants pour l'inclusion : On utilise ici aussi le théorème de la limite monotone.*
- *Union d'un nombre fini ou dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles : On utilise l'additivité (cas fini) ou la σ-additivité (cas dénombrable) de la mesure de probabilité.*
- *Union d'un nombre fini d'événements mutuellement indépendants : On a intérêt dans ce cas à considérer l'événement complémentaire. On est alors ramené au calcul de la probabilité d'une intersection d'événements mutuellement indépendants.*
- *Union d'un nombre fini d'événements lorsqu'on a des informations sur les intersections : On utilise la formule du crible de Poincaré. Les cas $n = 2$ et $n = 3$ sont les plus utiles :*
  - $n = 2$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$
  - $n = 3$: $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Méthode III.5 (Cas d'une expérience dont l'issue dépend de résultats antérieurs)**.** *Dans certaines situations, par exemple lorsque le mode opératoire d'une expérience (par exemple la composition d'une urne) dépend du résultat d'une expérience précédente, il peut être nécessaire de discuter suivant le résultat obtenu lors de l'expérience antérieure : autrement dit, dans ces situations, il est aisé de calculer des probabilités conditionnellement à chacun des résultats possibles de la première expérience. Il faut ensuite récupérer la probabilité globale à partir de toutes ces probabilités conditionnelles. On utilise pour cela la formule des probabilités totales.*
À retenir : discussion à faire $\rightarrow$ formule des probabilités totales.

Enfin, vu qu'elles interviennent dans de nombreuses formules, nous faisons quelques remarques concernant le calcul des probabilités conditionnelles.

Méthode III.6 (Calcul de probabilités conditionnelles)**.** *Puisque la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$ sachant un événement B donné est une mesure de probabilité, tous les résultats, et toutes les règles vues ci-dessus pour le calcul des probabilités s'appliquent au calcul des probabilités conditionnelles. Lorsque ces formules font elles-mêmes intervenir des probabilités conditionnelles, les conditions s'ajoutent à celle déjà présente (sous forme d'une intersection) :*

$$(\mathbb{P}_B)_C = \mathbb{P}_{B\cap C}.$$

À titre d'exemple, voici la formule des probabilités totales pour une probabilité conditionnelle : $(A_i)_{i\in I}$ étant un système complet au plus dénombrable tel que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}_C(A_i) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(B|C) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i|C)\mathbb{P}(B|C \cap A_i).$$

Remarque III.7. *Attention, on ne peut pas définir de notion d'événement conditionnel. Ce n'est pas l'événement qui est conditionnel, mais sa réalisation. Ainsi, si vous adoptez la démarche générale de rédaction :*

- *ne décrivez pas l'événement conditionnel (cela n'a pas de sens), mais donnez bien une condition nécessaire et suffisante de réalisation, conditionnellement à un certain événement :*

« Sachant que B est réalisé, A est réalisé si et seulement si ... »

- *Gardez-vous bien de transcrire cette phrase de manière ensembliste ; cela vous amènerait inévitablement à considérer des « événements conditionnels ». Sautez cette étape et passez directement aux probabilités. Vous pouvez transcrire votre phrase de façon ensembliste à l'intérieur des probabilités, la condition étant alors précisée non pas au niveau des ensembles, mais au niveau de la probabilité.*

Remarque III.8. *L'indépendance est une notion dépendant de la mesure de probabilité. Ce n'est pas parce que A et B sont indépendants (lorsqu'on dit cela, on sous-entend l'indépendance pour la mesure de probabilité totale $\mathbb{P}$) qu'ils sont indépendants pour une mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_C$.*

Exemple III.9. *On effectue 3 tirages à Pile ou Face indépendants. L'événement C est réalisé si et seulement si on obtient exactement 1 Pile lors des tirages 1 et 2, A de même avec les tirages 2 et 3, et B de même avec les tirages 1 et 3. Les événements A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$, mais pas pour $\mathbb{P}_C$.*