Théorème II.9 (Formule de Bayes sur un système complet)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet fini ou dénombrable, et B un événement non quasi-impossible. On suppose que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Soit $j \in I$. Alors :*

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Éléments de preuve. Exprimer $\mathbb{P}(B)$ avec la formule des probabilités totales dans la formule précédente. □

Remarque II.10 (Intérêt de la formule de Bayes)**.** *Le système (A_i) représente souvent une liste de causes pouvant amener l'événement B lors d'une étape suivante de l'expérience. Il est alors généralement facile de déterminer la probabilité qu'une certaine conséquence B ait lieu, sachant que la cause A_i a eu lieu, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B|A_i)$ (on respecte dans ce cas l'ordre temporel). Ces données permettent, grâce à la formule de Bayes, de remonter le temps, en déterminant la probabilité qu'une certaine cause A_i ait eu lieu sachant la conséquence B. Pour cette raison, cette formule est aussi souvent appelée formule de probabilité des causes.*

Exemple II.11. *Dans une population composée d'autant d'hommes que de femmes, 5 % des hommes et 0,25 % des femmes sont daltoniens. Quelle est la probabilité pour qu'une personne daltonienne choisie au hasard soit une femme ?*

II.3 Indépendance

Les probabilités conditionnelles mesurent l'impact de la réalisation d'un événement sur un autre. Si cet impact est nul (c'est-à-dire si la connaissance de la réalisation d'un événement n'influe pas sur la probabilité de l'autre), on dira que ces deux événements sont indépendants.
Ainsi, intuitivement, deux événements A et B sont indépendants si la connaissance de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre, donc si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. L'inconvénient de cette définition réside dans le fait qu'elle n'est valable que sous une hypothèse de non quasi-impossibilité, afin de pouvoir considérer les probabilités conditionnelles. On constate cependant que dans le cas de non quasi-impossibilité, les deux égalités sont équivalentes à l'égalité : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Cette égalité pouvant être considérée sans hypothèse de quasi-impossibilité, c'est elle que nous prenons comme définition de l'indépendance. Elle a en outre l'avantage d'être symétrique.

Définition II.12 (Événements indépendants)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A, B) \in \mathcal{T}^2$. Les événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

En faisant le cheminement inverse de celui précédant la définition, il vient :

Proposition II.13 (Probabilités conditionnelles et indépendance)**.** *Soit A et B deux événements indépendants tel que B ne soit pas quasi-impossible. Alors*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B).$$

On a évidemment aussi $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$ si A n'est pas quasi-impossible.

On note dans ce qui suit $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Définition II.14 (Indépendance d'une famille)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. On dit que les $A_i, i \in I$, sont indépendants (ou mutuellement indépendants), si et seulement si pour tout $J \in \mathcal{P}_f(I)$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(A_j).$$

En particulier si I lui-même est fini en prenant $J = I$:

Proposition II.15 (Probabilité d'une intersection d'événements indépendants)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'événements indépendants. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque II.16. *L'égalité précédente ne suffit pas à avoir l'indépendance. Il faut bien contrôler TOUS les produits des sous-familles (finies).*
On verra dans le paragraphe suivant comment calculer la probabilité d'une intersection lorsque les événements ne sont pas indépendants (formule des probabilités composées).

Exemple II.17. *On fait des tirages à pile ou face*

- *A est réalisé si et seulement si le premier tirage est Pile.*
- *B est réalisé si et seulement si lors des 3 premiers tirages, il y a au plus un Pile.*
- *$C = B$.*

On a $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, mais les événements ne sont clairement pas indépendants !

De la définition même découle :

Proposition II.18 (Stabilité de l'indépendance par restriction)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants et $J \subset I$. Alors $(A_j)_{j\in J}$ est encore composée d'événements indépendants.*

En particulier, en prenant toutes les sous-familles de 2 événements, l'indépendance implique l'indépendance 2 à 2 des événements.

Remarque II.19. *La réciproque est fausse : l'indépendance 2 à 2 d'une famille n'implique pas l'indépendance (mutuelle).*

Exemple II.20. *On procède à trois tirages à Pile ou Face. Soit A l'événement consistant à obtenir exactement 1 Pile lors des tirages 2 et 3, B de même lors des tirages 1 et 3, C de même lors des tirages 1 et 2. Les événements A, B et C sont 2 à 2 indépendants, mais pas mutuellement.*

Proposition II.21 (Indépendance des intersections de sous-familles disjointes, HP)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants, et $(I_k)_{k\in K}$ une famille de sous-ensembles finis de I, 2 à 2 disjoints. Alors la famille $\bigcap_{i\in I_k} A_i$ est constituée d'événements indépendants.*

Éléments de preuve. Prendre une intersection finie de tels ensembles, c'est aussi une intersection finie de A_i. Écrire par indépendance la probabilité comme produit de $\mathbb{P}(A_i)$, puis regrouper par paquets de I_k en réutilisant l'indépendance sur ces paquets. □

Proposition II.22 (Indépendance et complémentation)**.** *Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Éléments de preuve. Calculer $\mathbb{P}(A\cap\overline{B}) = \mathbb{P}(A\setminus(A\cap B))$. □

Proposition II.23 (Indépendance et complémentation pour une famille finie)**.** *Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, il en est de même de $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$.*

Éléments de preuve. Considérer l'intersection d'une sous-famille. Seul cas à voir : $\overline{A_1}$ est dans la sous-famille. Se ramener au cas précédent en justifiant que A_1 est indépendant de l'intersection des autres termes de la sous-famille. □

Corollaire II.24 (Indépendance et complémentation pour une famille quelconque)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements indépendants et $(B_i)_{i\in I}$ une famille telle que pour tout $i \in I$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$. Alors $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements indépendants.*

III. Bilan des méthodes calculatoires en probabilités

Nous exposons ici le principe général du calcul (et de la rédaction de ce calcul) d'une probabilité. Évidemment, dans la pratique, les situations sont très variées, et on peut être amené à s'écarter légèrement de la voie tracée ci-dessous.

Méthode III.1 (Comment aborder un calcul de probabilité)**.**

1. *Si on est dans une situation d'équiprobabilité, on peut se diriger vers un argument combinatoire (et utiliser la formule de Laplace). Dans les autres cas, la démarche générale est indiquée ci-dessous.*
2. *Définir des événements simples issus de l'expérience décrite, en n'oubliant pas la numérotation de ces événements en cas d'expérience répétée. Ces événements simples auront pour vocation de décrire ceux qui nous intéressent. Il ne faut pas hésiter à introduire des événements par vous-même, à donner des notations. Ce travail n'est pas nécessairement fait pour vous dans le sujet.*
3. *Décrire à l'aide d'une phrase l'événement dont on recherche la probabilité, sous forme d'une condition nécessaire et suffisante de réalisation :*

   « L'événement A est réalisé si et seulement si ... »

   Cette condition nécessaire et suffisante de réalisation de l'événement A doit s'exprimer en fonction de la réalisation ou non des événements simples définis dans la première étape. Il s'agit donc de « décomposer » l'événement A en événements simples.
4. *Traduire cette description dans le langage ensembliste (c'est-à-dire sous forme d'union, intersection ou complémentaires d'événements élémentaires). Les deux étapes sont nécessaires : la première (description verbale) fournit une explication facilement lisible, et éclaire la formule, la seconde (description ensembliste) donne de la rigueur à l'argument, et permet ensuite de s'orienter vers la bonne méthode de calcul.*
5. *Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(A)$, en se servant de la décomposition ensembliste précédente, et des règles de calcul des probabilités d'unions, d'intersections ou de complémentaires. Nous rappelons l'essentiel de ces règles ci-dessous.*

Ainsi, il est important de savoir s'orienter rapidement vers la bonne technique de calcul (probabilité d'une union, d'une intersection), suivant la situation rencontrée. Voici les différents cas rencontrés les plus fréquemment :

Méthode III.2 (Calcul de la probabilité d'un complémentaire)**.** *Une seule formule à connaître, issue de la définition d'une mesure de probabilité :*

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Méthode III.3 (Calcul de la probabilité d'une intersection)**.** *Suivant les cas :*

- *Intersection dénombrable d'événements décroissants pour l'inclusion : On utilise le théorème de la limite monotone.*
- *Intersection d'un nombre fini d'événements mutuellement indépendants : On utilise la relation issue de la définition de l'indépendance mutuelle :*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n).$$

- *Intersection d'un nombre fini d'événements non nécessairement indépendants : On utilise la formule des probabilités composées. Cette formule est surtout utile lorsqu'il y a un enchaînement*