II.2 Formules liées aux probabilités conditionnelles

Théorème II.4 (Formule des probabilités totales)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet fini ou dénombrable, tels que les événements A_i ne sont pas presque-impossibles, et soit $B \in \mathcal{T}$. Alors la famille $(\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable, et :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Éléments de preuve. Écrire $B = \left(\bigcup_{i\in I} B\cap A_i\right) \cup (B\cap C)$, où $\mathbb{P}(C) = 0$. □

Remarque II.5.
1. *La formule des probabilités totales permet de retrouver une probabilité $\mathbb{P}(B)$ connaissant les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(B|A_i)$. Ainsi, on peut calculer $\mathbb{P}(B)$ en « distinguant suivant un certain nombre de cas » (suivant que A_i est réalisé), si ces cas partagent l'ensemble (ou presque) des cas possibles. Ainsi, cette formule est adaptée au cas où le résultat d'une expérience dépend de résultats antérieurs, donc si on est amené à faire une discussion pour décrire le résultat de l'expérience.*
2. *Si un SCE ou un SQCE contient des événements quasi-impossibles, on a vu ci-dessus qu'en enlevant ces événements, on obtient encore un SQCE avec lequel la formule des probabilités totales est valide. Ainsi, plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est un SQCE quelconque,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\substack{i\in I\\ \mathbb{P}(A_i)\neq 0}} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Théorème II.6 (Formule des probabilités composées)**.** *Soit $n \geq 2$, et $(A_1,\dots,A_n) \in \mathcal{T}^n$ tel que $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}) \neq 0$ (i.e. $A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}$ n'est pas quasi-impossible). Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

$$= \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\Big|\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

Éléments de preuve. Récurrence sur n. □

Remarque II.7. *L'intérêt de cette formule est de donner une formule pour le calcul des probabilités d'intersections d'événements, notamment dans le cas d'une succession d'expériences. Cette formule dévoile toute son utilité lorsque les événements considérés ne sont pas mutuellement indépendants. En cas d'indépendance mutuelle, elle ne dit rien de plus que la proposition ci-dessous.*

Théorème II.8 (Formule de Bayes simple)**.** *Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Éléments de preuve. Calculer $\mathbb{P}(A\cap B)$ en conditionnant de deux manières. □

De façon plus générale, la connaissance des probabilités d'un système complet, et des probabilités d'un événement B conditionnées au système complet permet de retourner une à une les probabilités conditionnelles :

Théorème II.9 (Formule de Bayes sur un système complet)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet fini ou dénombrable, et B un événement non quasi-impossible. On suppose que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Soit $j \in I$. Alors :*

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Éléments de preuve. Exprimer $\mathbb{P}(B)$ avec la formule des probabilités totales dans la formule précédente. □

Remarque II.10 (Intérêt de la formule de Bayes)**.** *Le système (A_i) représente souvent une liste de causes pouvant amener l'événement B lors d'une étape suivante de l'expérience. Il est alors généralement facile de déterminer la probabilité qu'une certaine conséquence B ait lieu, sachant que la cause A_i a eu lieu, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B|A_i)$ (on respecte dans ce cas l'ordre temporel). Ces données permettent, grâce à la formule de Bayes, de remonter le temps, en déterminant la probabilité qu'une certaine cause A_i ait eu lieu sachant la conséquence B. Pour cette raison, cette formule est aussi souvent appelée formule de probabilité des causes.*

Exemple II.11. *Dans une population composée d'autant d'hommes que de femmes, 5 % des hommes et 0,25 % des femmes sont daltoniens. Quelle est la probabilité pour qu'une personne daltonienne choisie au hasard soit une femme ?*

II.3 Indépendance

Les probabilités conditionnelles mesurent l'impact de la réalisation d'un événement sur un autre. Si cet impact est nul (c'est-à-dire si la connaissance de la réalisation d'un événement n'influe pas sur la probabilité de l'autre), on dira que ces deux événements sont indépendants.
Ainsi, intuitivement, deux événements A et B sont indépendants si la connaissance de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre, donc si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. L'inconvénient de cette définition réside dans le fait qu'elle n'est valable que sous une hypothèse de non quasi-impossibilité, afin de pouvoir considérer les probabilités conditionnelles. On constate cependant que dans le cas de non quasi-impossibilité, les deux égalités sont équivalentes à l'égalité : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Cette égalité pouvant être considérée sans hypothèse de quasi-impossibilité, c'est elle que nous prenons comme définition de l'indépendance. Elle a en outre l'avantage d'être symétrique.

Définition II.12 (Événements indépendants)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A, B) \in \mathcal{T}^2$. Les événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

En faisant le cheminement inverse de celui précédant la définition, il vient :

Proposition II.13 (Probabilités conditionnelles et indépendance)**.** *Soit A et B deux événements indépendants tel que B ne soit pas quasi-impossible. Alors*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B).$$

On a évidemment aussi $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)$ si A n'est pas quasi-impossible.

On note dans ce qui suit $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Définition II.14 (Indépendance d'une famille)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. On dit que les $A_i, i \in I$, sont indépendants (ou mutuellement indépendants), si et seulement si pour tout $J \in \mathcal{P}_f(I)$,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(A_j).$$