2. *À condition d'enlever le cas des familles vides, la propriété est aussi trivialement vraie pour les intersections quelconques d'ensembles négligeables, et les unions quelconques d'ensembles presque sûrs.*

On définit maintenant une notion voisine des SCE, mais qui permet plus de souplesse dans les hypothèses de certains théorèmes.

Définition I.34 (Système quasi-complet d'événements, SQCE)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisable, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements si :*

(i) les A_i sont 2 à 2 incompatibles;

(ii) $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = 1$.

Ainsi, la différence avec un système complet réside dans le fait que certaines parts peuvent être vides, et que l'union $\bigcup_{i\in I} A_i$ n'est égale à Ω qu'à un ensemble négligeable près.
Un système complet est bien entendu aussi quasi-complet, la réciproque étant fausse.

Proposition I.35 (Système quasi-complet à probabilités non nulles)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un SQCE, et $J = \{i \in I, \mathbb{P}(A_i) > 0\}$. Alors $(A_j)_{j\in J}$ est encore un SQCE.*

II. Conditionnement et indépendance

II.1 Probabilités conditionnelles

Les définitions relatives aux probabilités conditionnelles s'étendent bien au contexte étendu qu'on vient de définir.

Définition II.1 (Probabilités conditionnelles)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements de $\mathcal{T}$ tels que B ne soit pas presque-impossible. Alors, la probabilité conditionnelle de A en B (ou la probabilité de A sachant B) est :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On trouve également souvent la notation $\mathbb{P}(A|B)$.

Cette définition se comprend bien pour la mesure uniforme : il s'agit dans ce cas de la proportion des éléments de B qui satisfont A (c'est-à-dire la proportion des éléments de B qui sont dans $A \cap B$).

Proposition II.2. *Soit B un événement non presque-impossible. Alors $\mathbb{P}_B$ définit une mesure de probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.*

Éléments de preuve. Vérifications sans difficulté. □

Remarque II.3. *La définition des probabilités conditionnelles est souvent utilisée sous la forme suivante : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$. En effet, expérimentalement, on a plus facilement accès aux probabilités conditionnelles qu'aux probabilités d'intersections, et on s'en sert pour le calcul de probabilités d'intersections. C'est d'ailleurs le cas initial de la formule plus générale des probabilités composées.*

II.2 Formules liées aux probabilités conditionnelles

Théorème II.4 (Formule des probabilités totales)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet fini ou dénombrable, tels que les événements A_i ne sont pas presque-impossibles, et soit $B \in \mathcal{T}$. Alors la famille $(\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable, et :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Éléments de preuve. Écrire $B = \left(\bigcup_{i\in I} B\cap A_i\right) \cup (B\cap C)$, où $\mathbb{P}(C) = 0$. □

Remarque II.5.
1. *La formule des probabilités totales permet de retrouver une probabilité $\mathbb{P}(B)$ connaissant les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(B|A_i)$. Ainsi, on peut calculer $\mathbb{P}(B)$ en « distinguant suivant un certain nombre de cas » (suivant que A_i est réalisé), si ces cas partagent l'ensemble (ou presque) des cas possibles. Ainsi, cette formule est adaptée au cas où le résultat d'une expérience dépend de résultats antérieurs, donc si on est amené à faire une discussion pour décrire le résultat de l'expérience.*
2. *Si un SCE ou un SQCE contient des événements quasi-impossibles, on a vu ci-dessus qu'en enlevant ces événements, on obtient encore un SQCE avec lequel la formule des probabilités totales est valide. Ainsi, plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est un SQCE quelconque,*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\substack{i\in I\\ \mathbb{P}(A_i)\neq 0}} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Théorème II.6 (Formule des probabilités composées)**.** *Soit $n \geq 2$, et $(A_1,\dots,A_n) \in \mathcal{T}^n$ tel que $\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}) \neq 0$ (i.e. $A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}$ n'est pas quasi-impossible). Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

$$= \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\Big|\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

Éléments de preuve. Récurrence sur n. □

Remarque II.7. *L'intérêt de cette formule est de donner une formule pour le calcul des probabilités d'intersections d'événements, notamment dans le cas d'une succession d'expériences. Cette formule dévoile toute son utilité lorsque les événements considérés ne sont pas mutuellement indépendants. En cas d'indépendance mutuelle, elle ne dit rien de plus que la proposition ci-dessous.*

Théorème II.8 (Formule de Bayes simple)**.** *Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Éléments de preuve. Calculer $\mathbb{P}(A\cap B)$ en conditionnant de deux manières. □

De façon plus générale, la connaissance des probabilités d'un système complet, et des probabilités d'un événement B conditionnées au système complet permet de retourner une à une les probabilités conditionnelles :