- *La probabilité que presque tous les A_k se réalisent est*

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Par exemple, calculer la probabilité que lors d'une suite infinie de tirages à P/F, la suite obtenue soit stationnaire.

Corollaire I.26. *Soit (A_n) une suite d'événements.*

- *La probabilité qu'un nombre infini de A_k se réalisent est*

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

- *La probabilité que presque tous les A_k se réalisent est*

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Exemple I.27. *On tire une infinité de fois à P ou F. Probabilité que la suite de P/F soit stationnaire.*

Remarque I.28. *Si (A_n) est décroissante, $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n$ et $\limsup A_n = \lim \downarrow A_n$; de même si (A_n) est croissante, $\liminf A_n = \lim \uparrow A_n$. Le corollaire précédent englobe donc le théorème de continuité monotone.*

I.5 Événements négligeables, presque sûrs

Définition I.29 (Ensembles négligeables)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{T}$.*

1. *On dit que A est* négligeable*, ou* presque-impossible*, ou* quasi-impossible *si $\mathbb{P}(A) = 0$.*
2. *On dit que A est* presque sûr*, ou* presque-certain *ou* quasi-certain *si $\mathbb{P}(A) = 1$.*
3. *Une propriété est vraie* presque sûrement *si l'événement « la propriété est satisfaite » est presque-certain.*

Exemple I.30. *Les événements « n'obtenir que des P » lors d'une succession infinie de tirages P/F, ou « obtenir une suite stationnaire » sont quasi-impossibles, sans être impossibles. Leur complémentaire est donc presque sûr, sans être certain.*

Remarque I.31. *La terminologie recommandée par le programme officiel est « négligeable » et « presque sûr », mais les autres terminologies sont aussi très répandues dans les ouvrages.*

Proposition I.32 (Intersection et union d'événements presque impossibles/sûrs)**.**
1. *Toute union d'un nombre au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.*
2. *Toute intersection d'un nombre au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.*

Éléments de preuve. Par sous-additivité dénombrable, puis complémentation. □

Remarque I.33.
1. *Dans $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ par convention, si I est vide,*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \Omega.$$

Ainsi, les propriétés sont aussi vraies pour des familles vides.

2. *À condition d'enlever le cas des familles vides, la propriété est aussi trivialement vraie pour les intersections quelconques d'ensembles négligeables, et les unions quelconques d'ensembles presque sûrs.*

On définit maintenant une notion voisine des SCE, mais qui permet plus de souplesse dans les hypothèses de certains théorèmes.

Définition I.34 (Système quasi-complet d'événements, SQCE)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisable, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements si :*

(i) les A_i sont 2 à 2 incompatibles;

(ii) $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = 1$.

Ainsi, la différence avec un système complet réside dans le fait que certaines parts peuvent être vides, et que l'union $\bigcup_{i\in I} A_i$ n'est égale à Ω qu'à un ensemble négligeable près.
Un système complet est bien entendu aussi quasi-complet, la réciproque étant fausse.

Proposition I.35 (Système quasi-complet à probabilités non nulles)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un SQCE, et $J = \{i \in I, \mathbb{P}(A_i) > 0\}$. Alors $(A_j)_{j\in J}$ est encore un SQCE.*

II. Conditionnement et indépendance

II.1 Probabilités conditionnelles

Les définitions relatives aux probabilités conditionnelles s'étendent bien au contexte étendu qu'on vient de définir.

Définition II.1 (Probabilités conditionnelles)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B deux événements de $\mathcal{T}$ tels que B ne soit pas presque-impossible. Alors, la probabilité conditionnelle de A en B (ou la probabilité de A sachant B) est :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On trouve également souvent la notation $\mathbb{P}(A|B)$.

Cette définition se comprend bien pour la mesure uniforme : il s'agit dans ce cas de la proportion des éléments de B qui satisfont A (c'est-à-dire la proportion des éléments de B qui sont dans $A \cap B$).

Proposition II.2. *Soit B un événement non presque-impossible. Alors $\mathbb{P}_B$ définit une mesure de probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.*

Éléments de preuve. Vérifications sans difficulté. □

Remarque II.3. *La définition des probabilités conditionnelles est souvent utilisée sous la forme suivante : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$. En effet, expérimentalement, on a plus facilement accès aux probabilités conditionnelles qu'aux probabilités d'intersections, et on s'en sert pour le calcul de probabilités d'intersections. C'est d'ailleurs le cas initial de la formule plus générale des probabilités composées.*