I.4 Continuité monotone

Le théorème suivant découle directement de la σ-additivité.

Théorème I.21 (Propriété de limite monotone, ou continuité monotone de $\mathbb{P}$)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements (pour l'inclusion). Alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
2. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements. Alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Éléments de preuve. Écrire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus A_{n-1})$, avec $A_{-1} = \emptyset$, puis σ-additivité. Passer au complémentaire pour l'intersection. □

Exemple I.22. *Lors d'une succession infinie de tirages à Pile ou Face, calculer la probabilité de n'obtenir que des Piles.*

Corollaire I.23. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille quelconque d'événements. Alors*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right).$$

Corollaire I.24 (Sous-additivité dénombrable de $\mathbb{P}$, ou inégalité de Boole)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$,*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

En définissant pour une suite croissante (A_n), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim \uparrow A_n$ et de même pour une suite décroissante, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim \downarrow A_n$, la propriété ci-dessus se réécrit :
$$\mathbb{P}(\lim \uparrow A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\lim \downarrow A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n).$$

Il s'agit donc d'une propriété de continuité séquentielle, d'où le nom donné au théorème.

Exemple I.25 (Limite supérieure et limite inférieure, HP)**.** *Soit (A_n) une suite d'événements. On définit*

- *la limite supérieure $\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$: réalisation d'une infinité de A_k;*
- *la limite inférieure $\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$: réalisation de presque tous les A_k (tous sauf un nombre fini, c'est-à-dire tous à partir d'un certain rang).*

Ainsi,

- *La probabilité qu'un nombre infini de A_k se réalisent est*
$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

- *La probabilité que presque tous les A_k se réalisent est*

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Par exemple, calculer la probabilité que lors d'une suite infinie de tirages à P/F, la suite obtenue soit stationnaire.

Corollaire I.26. *Soit (A_n) une suite d'événements.*

- *La probabilité qu'un nombre infini de A_k se réalisent est*

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

- *La probabilité que presque tous les A_k se réalisent est*

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Exemple I.27. *On tire une infinité de fois à P ou F. Probabilité que la suite de P/F soit stationnaire.*

Remarque I.28. *Si (A_n) est décroissante, $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n$ et $\limsup A_n = \lim \downarrow A_n$; de même si (A_n) est croissante, $\liminf A_n = \lim \uparrow A_n$. Le corollaire précédent englobe donc le théorème de continuité monotone.*

I.5 Événements négligeables, presque sûrs

Définition I.29 (Ensembles négligeables)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $A \in \mathcal{T}$.*

1. *On dit que A est* négligeable*, ou* presque-impossible*, ou* quasi-impossible *si $\mathbb{P}(A) = 0$.*
2. *On dit que A est* presque sûr*, ou* presque-certain *ou* quasi-certain *si $\mathbb{P}(A) = 1$.*
3. *Une propriété est vraie* presque sûrement *si l'événement « la propriété est satisfaite » est presque-certain.*

Exemple I.30. *Les événements « n'obtenir que des P » lors d'une succession infinie de tirages P/F, ou « obtenir une suite stationnaire » sont quasi-impossibles, sans être impossibles. Leur complémentaire est donc presque sûr, sans être certain.*

Remarque I.31. *La terminologie recommandée par le programme officiel est « négligeable » et « presque sûr », mais les autres terminologies sont aussi très répandues dans les ouvrages.*

Proposition I.32 (Intersection et union d'événements presque impossibles/sûrs)**.**
1. *Toute union d'un nombre au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.*
2. *Toute intersection d'un nombre au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.*

Éléments de preuve. Par sous-additivité dénombrable, puis complémentation. □

Remarque I.33.
1. *Dans $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ par convention, si I est vide,*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \Omega.$$

Ainsi, les propriétés sont aussi vraies pour des familles vides.