Éléments de preuve. Sans perte de généralité, considérer $I = [1, n]$, et faire une récurrence sur n à partir de l'expression de $\mathbb{P}(A \cup B)$ qui nous donne le cas $n = 2$. □

On verra un peu plus loin que cette propriété se généralise au cas dénombrable.

Proposition I.14 (Probabilités associées à un SCE). *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un SCE au plus dénombrable. Alors $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.*

I.3 Espaces probabilisés discrets

Il est fréquent que, même si Ω est de grand cardinal (infini non dénombrable), il existe un sous-ensemble A de Ω, au plus dénombrable, tel que presque sûrement, toutes les issues soient dans A (autrement dit, si A est lui-même un élément de la tribu, $\mathbb{P}(A) = 1$).

Définition I.15 (Espace probabilisé discret). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé tel que $\mathcal{T}$ contienne tous les singletons. On dit que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est discret si la famille $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est sommable de somme égale à 1.*

Remarque I.16. *Un résultat sur les familles sommables (démontré dans le chapitre sur la dénombrabilité) montre alors que $\{\omega \mid \mathbb{P}(\{\omega\}) \neq 0\}$ est au plus dénombrable, ce qui justifie la terminologie.*

Définition I.17 (Distribution discrète sur Ω). *Soit Ω un ensemble. Une distribution de probabilités sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que*

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$$

L'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ p_\omega \neq 0\}$ est appelé support de la distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$, et est au plus dénombrable, en vertu de la remarque précédente.
Ainsi, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé discret si et seulement si $\mathcal{T}$ contient les singletons, et si $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète sur Ω.

Proposition I.18 (Probabilité définie par une distribution discrète). *Soit Ω un ensemble quelconque, et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète. On définit, pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega,$$

bien défini dans $\mathbb{R}_+$.
L'application $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, et définit une mesure de probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Proposition I.19 (Détermination d'une probabilité sur un univers dénombrable). *Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Une mesure de probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.*

Éléments de preuve. Unicité car les singletons engendrent $\mathcal{P}(\Omega)$. Expliciter p ainsi obtenue en fonction des probabilités des singletons, et vérifier qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité. Ainsi, pour définir une mesure de probabilité sur Ω fini ou dénombrable, il suffit de se donner une distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$. □

Exemple I.20 (Probabilité uniforme sur un univers fini). *Si Ω est fini, on peut définir la mesure de probabilité uniforme en posant $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. On obtient alors, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \textit{(formule de Laplace)}.$$

I.4 Continuité monotone

Le théorème suivant découle directement de la σ-additivité.

Théorème I.21 (Propriété de limite monotone, ou continuité monotone de $\mathbb{P}$)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements (pour l'inclusion). Alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
2. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements. Alors :*
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Éléments de preuve. Écrire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus A_{n-1})$, avec $A_{-1} = \emptyset$, puis σ-additivité. Passer au complémentaire pour l'intersection. □

Exemple I.22. *Lors d'une succession infinie de tirages à Pile ou Face, calculer la probabilité de n'obtenir que des Piles.*

Corollaire I.23. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille quelconque d'événements. Alors*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right).$$

Corollaire I.24 (Sous-additivité dénombrable de $\mathbb{P}$, ou inégalité de Boole)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$,*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

En définissant pour une suite croissante (A_n), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim \uparrow A_n$ et de même pour une suite décroissante, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim \downarrow A_n$, la propriété ci-dessus se réécrit :
$$\mathbb{P}(\lim \uparrow A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\lim \downarrow A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n).$$

Il s'agit donc d'une propriété de continuité séquentielle, d'où le nom donné au théorème.

Exemple I.25 (Limite supérieure et limite inférieure, HP)**.** *Soit (A_n) une suite d'événements. On définit*

- *la limite supérieure $\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$: réalisation d'une infinité de A_k;*
- *la limite inférieure $\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$: réalisation de presque tous les A_k (tous sauf un nombre fini, c'est-à-dire tous à partir d'un certain rang).*

Ainsi,

- *La probabilité qu'un nombre infini de A_k se réalisent est*
$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \lim \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$