I.2 Mesures de probabilité, espaces probabilisés

Intuitivement, une probabilité mesure la possibilité qu'un événement donné se produise. Il s'agit donc d'un réel p indiquant la fréquence probable de réalisation de l'événement lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience dans des situations similaires, c'est-à-dire le rapport moyen entre le nombre de réalisations et le nombre d'expériences. Ainsi, une probabilité est un réel positif et inférieur à 1. De plus, toutes les expériences amenant une issue de Ω, la probabilité de l'événement Ω doit être 1. Enfin, si A et B sont deux événements ne pouvant pas être réalisés simultanément, le nombre d'expériences amenant A ou B est la somme du nombre d'expériences amenant A et du nombre d'expériences amenant B (puisqu'une expérience ne peut amener à la fois A et B). De l'interprétation ci-dessus, il doit alors venir que la probabilité de l'union disjointe $A \sqcup B$ doit être la somme des probabilités de A et de B. Cela motive la définition suivante :

Définition I.9 (Mesure de probabilité)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une mesure de probabilité (ou simplement une probabilité) sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$*;*
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$*;*
3. *(propriété de σ-additivité) Pour tout famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable, et on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque I.10. *Très souvent $I = \mathbb{N}$. Dans ce contexte, la famille $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, sa sommabilité équivaut à la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$.*

Définition I.11 (Espace probabilisé, ou modèle probabiliste de Kolmogorov)**.** *Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable, et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.*

Proposition I.12 (Propriétés d'une mesure de probabilité)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*;*
2. *(Additivité) Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;*
3. $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$*;*
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}, A \subset B \implies \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$*;*
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}, A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$*;*
6. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Éléments de preuve. $\mathbb{P}(\emptyset)$ s'obtient en étudiant la convergence de $\sum \mathbb{P}(\emptyset)$, convergence assurée par la σ-additivité. L'additivité en découle en complétant la famille finie (A, B) en une famille dénombrable par ajout de $\emptyset$. Les points 3,4,5,6 sont évidents, en décomposant le plus grand ensemble en union disjointe d'ensembles plus petits. □

Proposition I.13 (Sous-additivité finie de la mesure de probabilité)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'événements. Alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Éléments de preuve. Sans perte de généralité, considérer $I = [1, n]$, et faire une récurrence sur n à partir de l'expression de $\mathbb{P}(A \cup B)$ qui nous donne le cas $n = 2$. □

On verra un peu plus loin que cette propriété se généralise au cas dénombrable.

Proposition I.14 (Probabilités associées à un SCE). *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un SCE au plus dénombrable. Alors $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.*

I.3 Espaces probabilisés discrets

Il est fréquent que, même si Ω est de grand cardinal (infini non dénombrable), il existe un sous-ensemble A de Ω, au plus dénombrable, tel que presque sûrement, toutes les issues soient dans A (autrement dit, si A est lui-même un élément de la tribu, $\mathbb{P}(A) = 1$).

Définition I.15 (Espace probabilisé discret). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé tel que $\mathcal{T}$ contienne tous les singletons. On dit que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est discret si la famille $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est sommable de somme égale à 1.*

Remarque I.16. *Un résultat sur les familles sommables (démontré dans le chapitre sur la dénombrabilité) montre alors que $\{\omega \mid \mathbb{P}(\{\omega\}) \neq 0\}$ est au plus dénombrable, ce qui justifie la terminologie.*

Définition I.17 (Distribution discrète sur Ω). *Soit Ω un ensemble. Une distribution de probabilités sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que*

$$\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1.$$

L'ensemble $\{\omega \in \Omega,\ p_\omega \neq 0\}$ est appelé support de la distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$, et est au plus dénombrable, en vertu de la remarque précédente.
Ainsi, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé discret si et seulement si $\mathcal{T}$ contient les singletons, et si $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités discrète sur Ω.

Proposition I.18 (Probabilité définie par une distribution discrète). *Soit Ω un ensemble quelconque, et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités discrète. On définit, pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega,$$

bien défini dans $\mathbb{R}_+$.
L'application $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, et définit une mesure de probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Proposition I.19 (Détermination d'une probabilité sur un univers dénombrable). *Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Une mesure de probabilités sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.*

Éléments de preuve. Unicité car les singletons engendrent $\mathcal{P}(\Omega)$. Expliciter p ainsi obtenue en fonction des probabilités des singletons, et vérifier qu'il s'agit bien d'une mesure de probabilité. Ainsi, pour définir une mesure de probabilité sur Ω fini ou dénombrable, il suffit de se donner une distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$. □

Exemple I.20 (Probabilité uniforme sur un univers fini). *Si Ω est fini, on peut définir la mesure de probabilité uniforme en posant $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. On obtient alors, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \textit{(formule de Laplace)}.$$