I. Espaces probablisés

Le cours de probabilité de première année se construit entièrement dans le cadre d'un univers Ω fini. Dans ce cadre, une expérience d'univers des possibles Ω est un processus aléatoire amenant un résultat (une issue) ω appartenant à Ω. Un événement A est alors un sous-ensemble de Ω. Dire que A lors d'une expérience signifie que l'expérience débouche sur une issue ω appartenant à A. Nous voyons dans ce chapitre comment élargir ce cadre, en acceptant notamment des univers infinis. Ce cadre formel un peu abstrait est indispensable pour pouvoir définir de façon rigoureuse une mesure de probabilité.

I.1 Tribus et espaces probabilisables

Dans cette section, Ω désigne un ensemble quelconque, fini ou infini.
Souvent, la définition de la mesure de probabilité sur tous les sous-ensembles de Ω, n'est pas pertinente, ou peut poser des problèmes techniques. Pour cette raison, il peut être intéressant de pouvoir ne définir la mesure de probabilité que sur une classe particulière de sous-ensembles de Ω. L'objet de ce paragraphe et du suivant est de définir un type satisfaisant de classe de sous-ensembles à laquelle se restreindre. Voici nos exigences pour la construction d'une telle classe :
- L'événement certain Ω et l'événement impossible ont une probabilité, donc appartiennent à la classe ; - Pour tout événement A dont on sait calculer la probabilité, on voudrait pouvoir calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$; - Si on dispose d'une probabilité sur A et B, on voudrait disposer d'une probabilité de $A \cup B$. - Plus généralement, on souhaite pouvoir calculer la probabilité d'une union infinie dénombrable d'événements.

Exemple I.1. *Le dernier point est motivé par l'étude d'un tirage infini à Pile ou Face : quelle est la probabilité qu'un tirage donné (par exemple n'obtenir que des Piles) ait lieu ? Pour ce calcul, on peut encore se dispenser des unions (ou intersections par passage au complémentaire) infinies, en effectuant des majorations, si on définit correctement la probabilité ; mais en revanche, si on se demande maintenant quelle est la probabilité qu'un résultat soit stationnaire, on a besoin de regrouper une infinité de cas possibles (stationnaires à partir d'un certain rang).*

Cela nous amène à la définition suivante :

Définition I.2 (σ-algèbre, ou tribu)**.** *Soit Ω un univers (fini ou non). Une σ-algèbre $\mathcal{T}$ d'événements sur Ω (ou tribu) est un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :*

1. $\Omega \in \mathcal{T}$*;*
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), A \in \mathcal{T} \implies \overline{A} \in \mathcal{T}$ *(stabilité par complémentation);*
3. *Pour tout famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i\in I} A_i$ est dans $\mathcal{T}$ (stabilité par union dénombrable).*

Nous complétons les propriétés imposées par la définition par les suivantes :

Proposition I.3 (Propriétés des tribus)**.** *Soit $\mathcal{T}$ une tribu d'événements sur Ω.*

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$*;*
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega), (A, B) \in \mathcal{T}^2 \implies A \cup B \in \mathcal{T}$ *(stabilité par union finie);*
3. *Pour tout famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$;*
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega), (A, B) \in \mathcal{T}^2 \implies A \cap B \in \mathcal{T}$ *(stabilité par intersection finie).*

Éléments de preuve. Le point 2 se montre en complétant la famille (A, B) en une famille dénombrable, en ajoutant l'ensemble vide, ce qui ne change pas l'union. Les autres s'obtiennent par passage au complémentaire.
Par une récurrence immédiate, les points 2 et 4 se généralisent facilement aux unions ou intersections d'un nombre fini quelconque d'événements. □

Définition I.4 (Espace probabilisable et événements). • *Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathcal{T})$, où Ω est un ensemble quelconque, appelé univers, et $\mathcal{T}$ une σ-algèbre d'événements sur Ω.*

• *Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés événements (de l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$).*

Remarque I.5. *1. Une tribu est aussi fréquemment notée $\mathcal{A}$ au lieu de $\mathcal{T}$ (en référence à la terminologie σ-algèbre). C'est la notation utilisée dans le programme officiel.*

2. « La manipulation des tribus n'est pas un objectif du programme », dixit le programme officiel. La notion est surtout donnée pour avoir le bon cadre de travail. Ce cadre sera souvent fourni dans les exercices ou problème, sans que vous ayez à vous demander précisément à quoi il correspond.

3. En particulier, toute la très riche théorie des tribus, indispensable à une théorie un peu plus poussée des probabilités, ne sera pas abordée.

Exemple I.6. *$\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω. Dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, on choisira en général cette tribu. Elle s'avère en général trop riche lorsque Ω n'est pas dénombrable, et on devra dans ces cas définir des tribus plus petites pour éviter certains écueils techniques.*

On rappelle alors le vocabulaire probabiliste usuel, qui est le même que dans le cas fini :

Définition I.7 (Vocabulaire probabiliste). *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisé. On définit les terminologies ci-dessous.*

- *Événement : un objet $A \in \mathcal{T}$;*
- *Événement élémentaire, ou épreuve : un événement de la forme $\{\omega\}$ (attention, tout singleton n'est pas nécessairement un événement);*
- *Événement certain : l'événement Ω;*
- *Événement impossible : l'événement $\emptyset$;*
- *Événement contraire de l'événement A : l'événement $\overline{A} = C_\Omega A$;*
- *A entraîne B si $A \subseteq B$;*
- *Événement A et B : $A \cap B$ (réalisation simultanée);*
- *Événement A ou B : $A \cup B$;*
- *A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$;*
- *une famille $\{A_i, i \in I\}$ est dite constituée d'événements deux à deux incompatibles si pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles.*

Définition I.8 (Système complet d'événements, SCE). *Un système complet d'événements est une famille $\{A_i, i \in I\}$ formant une partition de Ω. Autrement dit :*

- *Les événements A_i sont non vides;*
- *La famille est constituée d'événements deux à deux incompatibles;*
- *$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.*

I.2 Mesures de probabilité, espaces probabilisés

Intuitivement, une probabilité mesure la possibilité qu'un événement donné se produise. Il s'agit donc d'un réel p indiquant la fréquence probable de réalisation de l'événement lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience dans des situations similaires, c'est-à-dire le rapport moyen entre le nombre de réalisations et le nombre d'expériences. Ainsi, une probabilité est un réel positif et inférieur à 1. De plus, toutes les expériences amenant une issue de Ω, la probabilité de l'événement Ω doit être 1. Enfin, si A et B sont deux événements ne pouvant pas être réalisés simultanément, le nombre d'expériences amenant A ou B est la somme du nombre d'expériences amenant A et du nombre d'expériences amenant B (puisqu'une expérience ne peut amener à la fois A et B). De l'interprétation ci-dessus, il doit alors venir que la probabilité de l'union disjointe $A \sqcup B$ doit être la somme des probabilités de A et de B. Cela motive la définition suivante :

Définition I.9 (Mesure de probabilité)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une mesure de probabilité (ou simplement une probabilité) sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. $\forall A \in \mathcal{T}, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$*;*
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$*;*
3. *(propriété de σ-additivité) Pour tout famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable, et on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque I.10. *Très souvent $I = \mathbb{N}$. Dans ce contexte, la famille $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, sa sommabilité équivaut à la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$.*

Définition I.11 (Espace probabilisé, ou modèle probabiliste de Kolmogorov)**.** *Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ où $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace probabilisable, et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.*

Proposition I.12 (Propriétés d'une mesure de probabilité)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$*;*
2. *(Additivité) Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$;*
3. $\forall A \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$*;*
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}, A \subset B \implies \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$*;*
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}, A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$*;*
6. $\forall (A, B) \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Éléments de preuve. $\mathbb{P}(\emptyset)$ s'obtient en étudiant la convergence de $\sum \mathbb{P}(\emptyset)$, convergence assurée par la σ-additivité. L'additivité en découle en complétant la famille finie (A, B) en une famille dénombrable par ajout de $\emptyset$. Les points 3,4,5,6 sont évidents, en décomposant le plus grand ensemble en union disjointe d'ensembles plus petits. □

Proposition I.13 (Sous-additivité finie de la mesure de probabilité)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'événements. Alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$