IV. La fonction Γ (HP mais classique)

Nous faisons dans ce paragraphe un rapide bilan des propriétés importantes de la fonction Γ d'Euler, pour la plupart déjà vues en exemple ou en exercice.

Définition IV.1 (Fonction Γ, Euler). *La fonction Γ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que l'intégrale converge, par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Proposition IV.2 (Domaine de définition). *La fonction Γ est définie sur $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.*

Proposition IV.3 (Identité remarquable). *Pour tout $z \in P$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Proposition IV.4 (Valeurs remarquables).
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.*
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Éléments de preuve. Pour le 2, se ramener à l'intégrale de Gauss par changement de variable. □

Proposition IV.5 (Continuité sur P). *La fonction Γ est continue sur P.*

Proposition IV.6 (Régularité sur $\mathbb{R}_+^*$). *La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Proposition IV.7 (Convexité et variations). *Γ est convexe. De plus elle décroit puis croit vers plus l'infini.*

Éléments de preuve. Voir l'exemple corrigé dans le dossier intégrale à paramètres dans le drive. □

Proposition IV.8 (Comportement asymptotique).
1. $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$
3. $\Gamma(x) \approx \frac{1}{x}$.

Éléments de preuve. La dernière propriété entraînant la première, on peut la montrer d'abord, avec l'identité remarquable. La deuxième s'obtient par croissance et les valeurs particulières déjà trouvées. □

La fonction Γ possède bien d'autres propriétés, et est d'une grande importance, notamment car elle intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace. Nous aurons peut-être l'occasion de prolonger notre étude de Γ en DM.