III. Dérivation d'intégrales à paramètre réel

Dans cette section, afin de pouvoir dériver, on considère le cas où le paramètre est réel, de sorte à obtenir après intégration une application d'une variable réelle.

Théorème III.1 (Dérivation d'une intégrale à paramètre réel)**.** *Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :*

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right| \leq \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Former le taux d'accroissement. L'IAF et les hypothèses permettent l'utilisation du TCD continu. □

Exemple III.2. *Soit $F : x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$. Exprimer la dérivée de F sous forme de la dérivée d'une intégrale à paramètres, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$.*

Par symétrisation par parité, on vient de démontrer le résultat classique suivant :

Proposition III.3 (Intégrale de Gauss, HP classique)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Par récurrence à partir du théorème de dérivation, on obtient :

Théorème III.4 (Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre réel)**.** *Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :*

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$ et tout $j \in [0, k-1]$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée k-ième) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)\right| \leq \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, et

$$\forall j \in [0,k], \forall x \in A, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,dt.$$

Exemple III.5. *Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.*

IV. La fonction Γ (HP mais classique)

Nous faisons dans ce paragraphe un rapide bilan des propriétés importantes de la fonction Γ d'Euler, pour la plupart déjà vues en exemple ou en exercice.

Définition IV.1 (Fonction Γ, Euler). *La fonction Γ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que l'intégrale converge, par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Proposition IV.2 (Domaine de définition). *La fonction Γ est définie sur $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.*

Proposition IV.3 (Identité remarquable). *Pour tout $z \in P$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Proposition IV.4 (Valeurs remarquables).
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.*
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Éléments de preuve. Pour le 2, se ramener à l'intégrale de Gauss par changement de variable. □

Proposition IV.5 (Continuité sur P). *La fonction Γ est continue sur P.*

Proposition IV.6 (Régularité sur $\mathbb{R}_+^*$). *La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Proposition IV.7 (Convexité et variations). *Γ est convexe. De plus elle décroit puis croit vers plus l'infini.*

Éléments de preuve. Voir l'exemple corrigé dans le dossier intégrale à paramètres dans le drive. □

Proposition IV.8 (Comportement asymptotique).
1. $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$
3. $\Gamma(x) \approx \frac{1}{x}$.

Éléments de preuve. La dernière propriété entraînant la première, on peut la montrer d'abord, avec l'identité remarquable. La deuxième s'obtient par croissance et les valeurs particulières déjà trouvées. □

La fonction Γ possède bien d'autres propriétés, et est d'une grande importance, notamment car elle intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace. Nous aurons peut-être l'occasion de prolonger notre étude de Γ en DM.