Exemple I.17. *Justifier l'intégrabilité, et exprimer sous forme d'une somme la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}t}\, dt$.

Remarque I.18. *Le caractère alterné permet aussi l'étude facile de la CVU, donc de la continuité sur les compacts, ce qui nous assure la continuité par morceaux (au moins sur l'intervalle $\hat{I}$, ce qui est suffisant).*

Méthode I.19 (Récupérer les bornes par CVU)**.** *Si on ne peut faire qu'une interversion partielle (par CVU ou par TITT), on peut faire tendre une borne vers la borne voulue en étudiant la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt$, pour pouvoir utiliser le théorème de la double limite.*

Exemple I.20. *En considérant* $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$, *montrer que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

II. Limite et continuité d'intégrales à paramètre dans un e.v.n.

Le point de départ de l'étude des intégrales à paramètres est la version continue du TCD. Elle est donnée dans le programme sous la forme suivante.

Théorème II.1 (Théorème de convergence dominée, version continue réelle)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$ et $a \in \overline{J}$. On suppose que :*

(i) pour tout $\lambda \in J$, f_λ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \underset{\lambda\to a}{\longrightarrow} f(t)$, et f est c.p.m. ;

(iii) il existe φ telle que pour tout $\lambda \in J$, $|f_\lambda| \leq \varphi$, et φ est intégrable.

Alors

$$\lim_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt = \int_I \lim_{\lambda\to a} f_\lambda(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. On montre directement la version plus générale ci-dessous. □

Une version un peu plus générale, pas explicitement au programme (mais pouvant se déduire du théorème de continuité qui suit, après prolongement de chaque $f(x,\cdot)$), et exprimée, comme on le fait souvent, en notation fonctionnelle plutôt que familiale, permet de considérer un paramètre dans un e.v.n..
Dans cet énoncé, f étant une fonction définie sur un produit cartésien $A \times I$, $f(\cdot, t)$ désigne la fonction $x \mapsto f(x,t)$ définie sur A, obtenue en fixant la deuxième variable égale à t. De même $f(x,\cdot)$ désigne la fonction d'une variable obtenue en faisant la première variable égale à x.

Théorème II.2 (Théorème de convergence dominée, version continue vectorielle)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{A}$, et $g : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(t)$, et g est c.p.m. ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x \in A$, $|f(x,\cdot)| \leq \varphi$, et φ est intégrable.

Alors

$$\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\, dt = \int_I g(t)\, dt = \int_I \lim_{x\to a} f(x,t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Par critère séquentiel, on se ramène au TCD discret. □

Exemple II.3. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x+\ln(t)}{1+x^2t^{\frac{3}{2}}}\,dt$.

En considérant $a\in I$, on obtient une propriété de continuité.

Théorème II.4 (Continuité ponctuelle d'une intégrale à paramètre dans un e.v.n.)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f:A\times I\to\mathbb{K}$ et $a\in A$. On suppose que :*

(i) pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue en a ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x\in A$, $|f(x,\cdot)|\leq\varphi$, et φ est intégrable.

Alors la fonction

$$F:x\mapsto\int_I f(x,t)\,dt$$

est continue en a.

Éléments de preuve. C'est l'application directe du TCD, dans sa version continue vectorielle, en un point du domaine. □

On en déduit de façon immédiate :

Théorème II.5 (Continuité globale d'une intégrale à paramètre dans un e.v.n.)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f:A\times I\to\mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue sur A ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x\in A$, $|f(x,\cdot)|\leq\varphi$, et φ est intégrable.

Alors la fonction

$$F:x\mapsto\int_I f(x,t)\,dt$$

est continue sur A.

Exemple II.6.

1. *Étudier la continuité de $x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(xt)e^{-t^2}\,dt$ et déterminer sa limite en $+\infty$.*
2. *Transformée de Laplace : Soit f une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$. Soit $A=\{p\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}(p)\geq 0\}$.*

   Étudier l'existence et la continuité sur A de la transformée de Laplace $F(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\,dt$.

Remarque II.7. *En pratique, il est fréquent de ne pas vérifier l'hypothèse de domination sur A tout entier, mais de le faire sur une famille $(B_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A tel que tout point de A soit dans l'intérieur d'un des B_i. Par exemple, si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut se contenter de faire la domination sur tous les segments.*

Exemple II.8. *Étudier la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\Gamma:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$.*

III. Dérivation d'intégrales à paramètre réel

Dans cette section, afin de pouvoir dériver, on considère le cas où le paramètre est réel, de sorte à obtenir après intégration une application d'une variable réelle.

Théorème III.1 (Dérivation d'une intégrale à paramètre réel)**.** *Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :*

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right| \leq \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Former le taux d'accroissement. L'IAF et les hypothèses permettent l'utilisation du TCD continu. □

Exemple III.2. *Soit $F : x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$. Exprimer la dérivée de F sous forme de la dérivée d'une intégrale à paramètres, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$.*

Par symétrisation par parité, on vient de démontrer le résultat classique suivant :

Proposition III.3 (Intégrale de Gauss, HP classique)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Par récurrence à partir du théorème de dérivation, on obtient :

Théorème III.4 (Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre réel)**.** *Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :*

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$ et tout $j \in [0, k-1]$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée k-ième) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)\right| \leq \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, et

$$\forall j \in [0,k], \forall x \in A, \quad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,dt.$$

Exemple III.5. *Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.*