I.2 Intégration terme à terme

Nous avons vu que le théorème d'interversion limite/intégrale dans le cas CVU s'adapte bien au cas des séries :

Théorème I.8 (Interversion $\sum / \int$ par CVU sur un segment)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie, et soit $a \in I$.*

1. *Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, alors*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

2. *En particulier, si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$,*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

L'intégrabilité sur un segment quelconque I n'ayant été définie que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, les autres énoncés se placent dans ce contexte ; ils peuvent s'adapter sans réelle difficulté au cadre d'e.v.n. de dimension finie, en regardant coordonnée par coordonnée dans une base.

Théorème I.9 (Intégration terme à terme, cas positif)**.** *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$;

(ii) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction S ;

(iii) S est continue par morceaux sur I.

Alors, l'égalité suivante est toujours vérifiée dans $\mathbb{R}_+$:

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Démonstration hors programme. Elle reste abordable avec le TCD.
1. Si $\sum f_n$ est intégrable, dominer la somme partielle par la somme totale et utiliser le TCD.
2. Sinon, on a divergence sur une des deux bornes de I, disons la borne supérieure. Soit $a \in I$. Justifier qu'il existe x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx \geq A,$$

A étant posé arbitrairement. Utiliser encore le TCD sur $[a,x]$, pour montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ est minoré par tout A réel. □

Remarque I.10. *En particulier, si les f_n sont positifs, on peut justifier l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en majorant $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$.*

Exemple I.11. *1. Intégrabilité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^3+n^3}$ sur $[0,+\infty[$.*

2. *Intégrabilité de* $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2t^2}$ *sur* $[0, +\infty[$.

3. *Calculer* $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n^4}]}$.

4. *Calculer* $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$, *en fonction de* $\zeta(2)$.

Remarque I.12. 1. *Le TITT positif peut s'utiliser dans des cas où on n'a pas convergence uniforme, et permet donc de gérer des cas plus variés que le théorème d'interversion* $\sum / \int$ *par CVU. C'est par exemple le cas du troisième exemple.*

2. *Le dernier exemple montre une situation typique dans laquelle on combine un développement en série et une intégration terme à terme pour calculer une intégrale. Les exemples de ce type sont nombreux, pensez-y !*

3. *Le point le plus délicat à justifier dans le cas positif est souvent la c.p.m. de la somme. Le programme stipule explicitement de ne pas trop s'attarder sur ces justifications.*

Théorème I.13 (Intégration terme à terme, cas général)**.** *Soit, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{K}$. *On suppose que :*

(i) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est intégrable ;*

(ii) $\sum_{n>0} f_n$ *converge simplement vers une fonction* S *;*

(iii) S *est c.p.m. sur* I *;*

(iv) $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\, dt < +\infty$.

Alors S *est intégrable sur* I, *et*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Démonstration hors-programme. On peut le démontrer un peu plus facilement sous une hypothèse supplémentaire, en supposant de plus $\sum |f_n|$ c.p.m.. □

Exemple I.14. *Calculer* $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$ *sous forme d'une somme de Riemann alternée.*

Remarque I.15. *Remarquez la similitude entre ces résultats d'intégration terme à terme, et les théorèmes de Fubini pour les familles sommables (version positive dans* $\mathbb{R}$, *et version générale). D'ailleurs, les théorèmes de Fubini peuvent se retrouver à partir des théorèmes d'ITT, en considérant des fonctions en escalier* f_n *prenant la valeur* $a_{n,p}$ *sur l'intervalle* $[p, p+1]$. *Ces théorèmes peuvent être vus comme une version continue/discrete des théorèmes de Fubini discret/discret. Il en existe aussi une version pour les intégrales doubles (version continue/continue), mais celle-ci n'est pas au programme.*

Méthode I.16 (Si $\sum \int_I |f_n| = +\infty$)**.** *Dans le cas où les conditions du TITT ne sont pas vérifiées, on peut parfois utiliser le TCD sur la somme partielle* (S_n). *C'est notamment assez fréquent avec des séries alternées, puisqu'on parvient dans ce cas à encadrer la somme* S *entre* S_0 *et* S_1. *L'hypothèse de domination est donc assez facile à obtenir.*

Exemple I.17. *Justifier l'intégrabilité, et exprimer sous forme d'une somme la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\sqrt{n}t}\, dt$.

Remarque I.18. *Le caractère alterné permet aussi l'étude facile de la CVU, donc de la continuité sur les compacts, ce qui nous assure la continuité par morceaux (au moins sur l'intervalle $\hat{I}$, ce qui est suffisant).*

Méthode I.19 (Récupérer les bornes par CVU)**.** *Si on ne peut faire qu'une interversion partielle (par CVU ou par TITT), on peut faire tendre une borne vers la borne voulue en étudiant la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt$, pour pouvoir utiliser le théorème de la double limite.*

Exemple I.20. *En considérant* $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$, *montrer que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

II. Limite et continuité d'intégrales à paramètre dans un e.v.n.

Le point de départ de l'étude des intégrales à paramètres est la version continue du TCD. Elle est donnée dans le programme sous la forme suivante.

Théorème II.1 (Théorème de convergence dominée, version continue réelle)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$ et $a \in \overline{J}$. On suppose que :*

(i) pour tout $\lambda \in J$, f_λ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \underset{\lambda\to a}{\longrightarrow} f(t)$, et f est c.p.m. ;

(iii) il existe φ telle que pour tout $\lambda \in J$, $|f_\lambda| \leq \varphi$, et φ est intégrable.

Alors

$$\lim_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt = \int_I \lim_{\lambda\to a} f_\lambda(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. On montre directement la version plus générale ci-dessous. □

Une version un peu plus générale, pas explicitement au programme (mais pouvant se déduire du théorème de continuité qui suit, après prolongement de chaque $f(x,\cdot)$), et exprimée, comme on le fait souvent, en notation fonctionnelle plutôt que familiale, permet de considérer un paramètre dans un e.v.n..
Dans cet énoncé, f étant une fonction définie sur un produit cartésien $A \times I$, $f(\cdot, t)$ désigne la fonction $x \mapsto f(x,t)$ définie sur A, obtenue en fixant la deuxième variable égale à t. De même $f(x,\cdot)$ désigne la fonction d'une variable obtenue en faisant la première variable égale à x.

Théorème II.2 (Théorème de convergence dominée, version continue vectorielle)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{A}$, et $g : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :*

(i) pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(t)$, et g est c.p.m. ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x \in A$, $|f(x,\cdot)| \leq \varphi$, et φ est intégrable.

Alors

$$\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\, dt = \int_I g(t)\, dt = \int_I \lim_{x\to a} f(x,t)\, dt.$$