Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement d'intégrales à paramètres. Il s'agit donc d'étudier une famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ intégrables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Leurs intégrales définissent une famille $\left(\int_I f_\lambda(t)dt\right)_{\lambda\in\Lambda}$, donc on cherche à étudier le comportement par rapport au paramètre λ.
Le contexte initial (qui est à la source des autres études) concerne un paramètre entier (i.e. $\Lambda = \mathbb{N}$). On dispose donc d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intégrables sur I, et on s'intéresse à la limite de la suite $\left(\int_I f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Nous nous intéresserons ensuite au cas où le paramètre λ est pris dans une partie Λ d'un e.v.n. de dimension finie. Nous adopterons dans ce contexte plutôt une représentation fonctionnelle de la famille, qui peut alors être décrite par une application :

$$f : \Lambda \times I \to \mathbb{K}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t).$$

Leurs intégrales définissent donc une application de Λ dans $\mathbb{K}$

$$g : \Lambda \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int_I f(x,t)dt.$$

On s'intéressera dans ce contexte aux propriétés relatives aux limites et à la continuité. Enfin, dans un contexte un peu plus restreint où Λ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on s'intéressera aux problèmes de dérivabilité de g.

I. Suites et séries d'intégrales

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, E désigne un e.v.n. de dimension finie, et (f_n) désigne une suite d'applications de I dans E. Les premiers résultats ont déjà été vus dans des contextes divers, et le but est ici de les regrouper afin d'avoir une meilleure vue d'ensemble sur les différents outils à disposition pour l'étude des intégrales de suites ou séries de fonctions.

I.1 Interversion limite/intégrale

Lorsque I est un segment, on dispose d'un outil particulier, déjà vu dans un chapitre antérieur, lié à la convergence uniforme.

Théorème I.1 (Interversion lim/intégrale en cas de CVU)**.** *On suppose que :*

(i) I *est un segment ;*

(ii) *les applications* (f_n) *sont continues ;*

(iii) *la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* I*.*

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Nous avions montré un résultat plus général, concernant la convergence uniforme d'une suite de primitives.

Proposition I.2 (Extension du théorème d'interversion limite/intégrale)**.** *Le théorème d'interversion limite/intégrale par CVU reste vrai sous les hypothèses suivantes :*

(i) I *est un segment ;*

(ii) *les* (f_n) *sont c.p.m. (ou plus généralement Riemann-intégrable) ;*

(iii) (f_n) *converge uniformément vers une fonction* f *;*

(iv) la fonction f est c.p.m. (ou plus généralement Riemann-intégrable).

La quatrième hypothèse remplace les hypothèses plus fortes de l'énoncé principal, qui assuraient la continuité de f.
Cela permet d'englober le cas des fonctions en escaliers.

Méthode I.3. *Si certains points empêchent la CVU, ou si l'intégrale n'est pas définie sur tout le segment on peut soit se rabattre sur le théorème de convergence dominé, soit, si ce n'est pas possible, couper autour de la borne.*

Exemple I.4. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n \, dx$.

L'outil le plus efficace, et plus général que le précédent (puisque valide sur des intervalles quelconques) reste le suivant, qu'on a déjà donné, sans le démontrer.

Théorème I.5 (Théorème de convergence dominée, TCD)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est c.p.m. ;

(ii) (f_n) converge simplement vers une fonction f ;

(iii) (hyp. de domination) il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$.

Alors les (f_n) et f sont intégrables sur I et $\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$.

Exemple I.6.
1. *Reprendre les exemples précédents, y compris celui où on n'avait pas CVU sur tout l'intervalle.*
2. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.
3. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x+n)e^{-\sqrt{n}x} dx$.

Remarque I.7.
1. *Lorsque la suite f_n est décroissante (ce qui est le cas des premiers exemples), alors on pourra toujours dominer la suite par f_0, à condition qu'elle soit intégrable.*
2. *Lorsque la suite est croissante, et que la limite f est intégrable, alors on pourra dominer (f_n) par f. C'est le cas du deuxième exemple.*
3. *Le dernier exemple montre un cas où (f_n) n'est ni croissante ni décroissante.*

I.2 Intégration terme à terme

Nous avons vu que le théorème d'interversion limite/intégrale dans le cas CVU s'adapte bien au cas des séries :

Théorème I.8 (Interversion $\sum / \int$ par CVU sur un segment)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie, et soit $a \in I$.*

1. *Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, alors*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

2. *En particulier, si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$,*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

L'intégrabilité sur un segment quelconque I n'ayant été définie que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, les autres énoncés se placent dans ce contexte ; ils peuvent s'adapter sans réelle difficulté au cadre d'e.v.n. de dimension finie, en regardant coordonnée par coordonnée dans une base.

Théorème I.9 (Intégration terme à terme, cas positif)**.** *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$;

(ii) $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction S ;

(iii) S est continue par morceaux sur I.

Alors, l'égalité suivante est toujours vérifiée dans $\mathbb{R}_+$:

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt.$$

Éléments de preuve. Démonstration hors programme. Elle reste abordable avec le TCD.
1. Si $\sum f_n$ est intégrable, dominer la somme partielle par la somme totale et utiliser le TCD.
2. Sinon, on a divergence sur une des deux bornes de I, disons la borne supérieure. Soit $a \in I$. Justifier qu'il existe x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx \geq A,$$

A étant posé arbitrairement. Utiliser encore le TCD sur $[a,x]$, pour montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ est minoré par tout A réel. □

Remarque I.10. *En particulier, si les f_n sont positifs, on peut justifier l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en majorant $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$.*

Exemple I.11. *1. Intégrabilité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^3+n^3}$ sur $[0,+\infty[$.*