La définition suivante est un rappel :

Définition III.10 (Exponentielle complexe)**.** *Pour $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit*

$$\exp(z) = e^z = e^x e^{iy}.$$

Théorème III.11 (DSE de l'exponentielle complexe)**.** *La fonction exp est DSE sur $\mathbb{C}$ et*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Par produit de Cauchy. □

III.3 DSE usuels

Définition III.12 (Coefficient binomial étendu)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.*

Proposition III.13 (DSE usuels)**.**

1. $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *pour* $z \in \mathbb{C}$;
2. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$
3. $\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+p-1)}{p!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-p}{n} z^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $p \in \mathbb{N}^*$;
4. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ *pour* $x \in]-1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
5. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, *pour* $x \in]-1, 1[$,
6. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
7. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
8. $ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
9. $sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
10. $Arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, *pour* $x \in]-1, 1[$.

Éléments de preuve.

1. Vu au paragraphe précédent
2. Somme géométrique.
3. Produits de Cauchy
4. Résolution de l'ED $(1+x)y' = ay$.
5. Par intégration (ou, ce qui revient en même, en dérivant cette série entière).
6. Vu précédemment
7. Vu précédemment
8. À partir du DSE de l'exponentielle
9. Idem
10. Par intégration.

□

Exercice III.14 (Calcul de DSE). *Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions f suivantes. On précisera le domaine de validité du DSE.*

1. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
2. $f(x) = \ln \frac{2-x}{3-x^2}$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \arctan \frac{x \sin a}{1 - x \cos a}$, $a \in \mathbb{R}$
5. $f(x) = \cos x \operatorname{ch} x$
6. $f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Déduire du 5 la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$.

Exercice III.15 (Série génératrice associée à une suite récurrente). *Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} u_n + 2$. Exprimer une équation différentielle satisfaite par la série $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, et résoudre cette équation différentielle (on laissera l'expression sous forme intégrale).*

Exercice III.16 (Un théorème tauberien). *Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note $f(x)$ sa somme. On suppose $na_n \to 0$ et $f(x) \to S$ lorsque $x \to 1^-$.*

1. *En considérant $u_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p - \sum_{p=0}^{n} a_p$, montrer que $\sum a_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ (Tauber).*
2. *Même question si on ne suppose plus $na_n \to 0$, mais en revanche $a_n \geq 0$ pour tout n.*
3. *Même question si on remplace l'hypothèse $na_n \to 0$ par l'hypothèse de convergence de $\sum n|a_n|^2$ (Fejer).*

Exercice III.17 (Mines 2015).
1. *Donner le domaine de définition dans $\mathbb{R}$ de la série entière $\sum_{n \geq 1} \ln(n) x^n$.*
2. *Déterminer un équivalent de la somme f de cette série entière en 1 puis en -1.*