Proposition III.5 (Opérations sur les fonctions développables en séries entières)**.** *Soit f et g deux fonctions développables en séries entières au voisinage de 0, et $\lambda \in \mathbb{C}$, dont le DSE est donné respectivement par $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors :*

1. *$f + \lambda g$ est développable en série entière, de DSE $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$;*
2. *fg est développable en série entière, de DSE égal au produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.*

III.2 DSE de l'exponentielle

On commence par redéfinir de façon propre la fonction exponentielle réelle.

Proposition III.6 (Définition de l'exponentielle réelle)**.** *Il existe une unique fonction f développable en série entière sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée exponentielle, notée $\exp(x)$, et vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Rechercher f sous la forme $\sum a_n x^n$, dériver et injecter dans l'équation différentielle. La relation sur (a_n) et la condition en 0 déterminent entièrement (a_n). □

Remarque III.7.

1. *Retenir cette méthode de recherche de développement en s'aidant d'une équation différentielle. Cela permet de trouver de façon efficace le DSE de fonctions solutions d'équations différentielles. Il est assez fréquent de commencer par rechercher ainsi les solutions développables en série entière d'une ED, qui aident souvent à trouver les autres.*
2. *Une fois l'existence d'une telle fonction obtenue, toutes les propriétés vue en première année sont valides. En particulier, les propriétés liées à la résolution des équations différentielles d'ordre 1. En particulier, le théorème de Cauchy Lipschitz pour les équations différentielles d'ordre 1 est vérifié, ce qui assure en particulier l'unicité de la solution de $f' = f$, tel que $f(0) = 1$. On en déduit que la fonction exp est non seulement unique parmi les fonctions DSE, mais également parmi toutes les fonctions dérivables.*

Proposition III.8 (DSE de cos et sin)**.** *La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(t) + i\sin(t)$ vérifie l'équation différentielle $\varphi' = i\varphi$, et $\varphi(0) = 1$, donc l'unique solution développable en série entière est*

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}.$$

Ainsi cos et sin sont DSE, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De plus, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(it) = e^{it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i\sin(t).$$

Éléments de preuve. Même technique que pour exp, mais maintenant on connaît par avance l'unicité de la solution de cette ED. □

Remarque III.9. *On peut aussi trouver les DSE de cos et sin en montrant que le reste de Taylor-Lagrange tend vers 0, par exemple avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

La définition suivante est un rappel :

Définition III.10 (Exponentielle complexe)**.** *Pour $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit*

$$\exp(z) = e^z = e^x e^{iy}.$$

Théorème III.11 (DSE de l'exponentielle complexe)**.** *La fonction exp est DSE sur $\mathbb{C}$ et*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Par produit de Cauchy. □

III.3 DSE usuels

Définition III.12 (Coefficient binomial étendu)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.*

Proposition III.13 (DSE usuels)**.**

1. $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ *pour* $z \in \mathbb{C}$;
2. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$
3. $\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+p-1)}{p!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-p}{n} z^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $p \in \mathbb{N}^*$;
4. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ *pour* $x \in]-1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
5. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, *pour* $x \in]-1, 1[$,
6. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
7. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
8. $ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
9. $sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, *pour* $x \in \mathbb{R}$;
10. $Arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, *pour* $x \in]-1, 1[$.

Éléments de preuve.

1. Vu au paragraphe précédent
2. Somme géométrique.
3. Produits de Cauchy
4. Résolution de l'ED $(1+x)y' = ay$.
5. Par intégration (ou, ce qui revient en même, en dérivant cette série entière).
6. Vu précédemment
7. Vu précédemment
8. À partir du DSE de l'exponentielle
9. Idem
10. Par intégration.

□