Éléments de preuve. 1. Dans le sens direct, c'est le théorème radial d'Abel et le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement (corollaire du théorème de la limite de la dérivée).
2. La démonstration du sens réciproque n'est pas exigible. Les hypothèses de positivité permettent d'obtenir la convexité sur $[0, R[$, donc aussi sur $[0, R[$. Majorer alors $\sum_{k=1}^{n} ka_k x^k$ par $A'(R)$, puis passer à la limite quand $x \to R^-$, puis quand $n \to +\infty$. □

Remarque II.16. *Ce théorème n'est explicitement au programme que dans un contexte de probabilités, avec un rayon $R = 1$, et des coefficients tous positifs. Il doit donc être en théorie redémontré dans toute autre circonstance, notamment le sens direct, lorsqu'on n'a pas l'hypothèse de positivité.*

Exercice II.17 (Principe du zéro isolé). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, et S sa somme. On suppose $S \neq 0$ et $S(0) = 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que S ne s'annule qu'en 0 sur l'intervalle $]-r, r[$ (on dit que 0 est un zéro isolé de S).*

Exercice II.18 (Équivalent en $+\infty$ de la somme d'une série entière). 1. *Déterminer le rayon de convergence de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$.

2. *En notant $f(x)$ la somme de cette série, en déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$.*

III. Développements en séries entières

III.1 Généralités sur les fonctions développables en séries entières

Définition III.1 (Fonction développable en série entière). *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (dans $\mathbb{K}$). On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0, s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $z \in \hat{B}(0, r)$,*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n.$$

Pour un $r > 0$ tel que cette égalité soit satisfaite, on dira que f est développable en série entière sur $\hat{B}(0, r)$.
Dans cette définition, si R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, on a nécessairement $r \leq R$, mais pas nécessairement l'égalité.

Proposition III.2 (CN, et unicité du développement en série entière). *Soit f une application définie au voisinage de 0 (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors, pour que f soit développable en série entière, la fonction de la variable réelle $f_{\mathbb{R}}$, définie au voisinage de 0 doit être de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le développement s'écrit alors*

$$\forall z \in \hat{B}(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{avec } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

En particulier, en cas d'existence, le développement en série entière est unique.

Remarque III.3 (Lien avec la série de Taylor). 1. *Lorsque f est DSE de la variable réelle, la série entière associée est nécessairement égale à la série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.*

2. *Réciproquement, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, la série de Taylor en 0 peut converger sur un intervalle $]-r, r[$ sans être égale à f. Dans ce cas, f ne peut pas être développable en série entière.*

Exemple III.4. *Soit f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que sa série de Taylor converge sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.*

Proposition III.5 (Opérations sur les fonctions développables en séries entières)**.** *Soit f et g deux fonctions développables en séries entières au voisinage de 0, et $\lambda \in \mathbb{C}$, dont le DSE est donné respectivement par $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors :*

1. *$f + \lambda g$ est développable en série entière, de DSE $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$;*
2. *fg est développable en série entière, de DSE égal au produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.*

III.2 DSE de l'exponentielle

On commence par redéfinir de façon propre la fonction exponentielle réelle.

Proposition III.6 (Définition de l'exponentielle réelle)**.** *Il existe une unique fonction f développable en série entière sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée exponentielle, notée $\exp(x)$, et vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Rechercher f sous la forme $\sum a_n x^n$, dériver et injecter dans l'équation différentielle. La relation sur (a_n) et la condition en 0 déterminent entièrement (a_n). □

Remarque III.7.

1. *Retenir cette méthode de recherche de développement en s'aidant d'une équation différentielle. Cela permet de trouver de façon efficace le DSE de fonctions solutions d'équations différentielles. Il est assez fréquent de commencer par rechercher ainsi les solutions développables en série entière d'une ED, qui aident souvent à trouver les autres.*
2. *Une fois l'existence d'une telle fonction obtenue, toutes les propriétés vue en première année sont valides. En particulier, les propriétés liées à la résolution des équations différentielles d'ordre 1. En particulier, le théorème de Cauchy Lipschitz pour les équations différentielles d'ordre 1 est vérifié, ce qui assure en particulier l'unicité de la solution de $f' = f$, tel que $f(0) = 1$. On en déduit que la fonction exp est non seulement unique parmi les fonctions DSE, mais également parmi toutes les fonctions dérivables.*

Proposition III.8 (DSE de cos et sin)**.** *La fonction $\varphi : t \mapsto \cos(t) + i\sin(t)$ vérifie l'équation différentielle $\varphi' = i\varphi$, et $\varphi(0) = 1$, donc l'unique solution développable en série entière est*

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}.$$

Ainsi cos et sin sont DSE, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De plus, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(it) = e^{it} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \cos(t) + i\sin(t).$$

Éléments de preuve. Même technique que pour exp, mais maintenant on connaît par avance l'unicité de la solution de cette ED. □

Remarque III.9. *On peut aussi trouver les DSE de cos et sin en montrant que le reste de Taylor-Lagrange tend vers 0, par exemple avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.*