Éléments de preuve. Montrer que le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$ converge uniformément vers 0, en faisant une transformation d'Abel, en écrivant $a_k R^k = R_k - R_{k+1}$, où

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k.$$

□

Remarque II.4. *1. Comme dit plus haut, ce résultat n'a d'intérêt que si la convergence n'est pas absolue. Dans le cas d'une CVA, le résultat obtenu est plus fort.*

2. Attention à ne pas en conclure que $\sum a_n R^n$ converge uniformément au voisinage de R. Ceci est faux en général, et nécessiterait de maîtriser l'approche de R dans toutes les directions (en restant dans le disque de convergence). Ici, on ne s'approche de R qu'en suivant un rayon.

II.2 Continuité et limite radiale

Les études de convergence uniforme ci-dessus amènent directement les propriétés de continuité des séries entières.

Théorème II.5 (Continuité d'une série entière). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Alors la fonction A est continue sur $\hat{B}(0,R)$.*

Remarque II.6. *Si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, on a même la continuité de A sur $\overline{B}(0,R)$.*

Théorème II.7 (Théorème radial d'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors*

$$\lim_{x \to R} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n.$$

Éléments de preuve. La démonstration est HP, pour éviter le théorème de CVU sur un rayon, dont le théorème d'Abel radial est une conséquence immédiate par théorème de la double-limite.
Remarque : même si le théorème de CVU sur un rayon est HP, le théorème d'Abel radial est, lui, bien au programme. □

Autrement dit, en combinant les deux résultats précédents, si $\sum a_n z^n$ est de rayon R et $\sum a_n R^n$ converge, la fonction de la variable réelle $x \mapsto \sum a_n x^n$ est continue sur $[0,R]$.

Exemple II.8. *On retrouve $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, connaissant le développement du logarithme sur $]-1,1[$.*
Remarquez que la preuve qu'on en avait donnée reposait sur une transformation d'Abel. Il s'agissait donc en fait de la preuve du théorème d'Abel radial, exprimée dans cette situation particulière.

Remarque II.9. *Le programme ne donne pas de résultat de primitivation spécifique aux séries entières, mais la convergence uniforme sur les $\overline{B}(0,r)$, $r < R$, permet d'utiliser le théorème de primitivation (et d'intégration) des suites de fonctions sur tout intervalle $[a,b] \subset [-R,R[$.*

II.3 Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^\infty$

On rappelle que $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Proposition II.10 (Rayon de convergence des séries dérivées). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=p} n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+p)z^n$ est de rayon de convergence R.*

Pour étudier les propriétés de dérivabilité, on se limite à la variable réelle. On pourrait obtenir des propriétés de dérivabilité en la variable complexe aussi (la dérivée étant aussi définie par limite du taux d'accroissement), mais cela débouche sur la théorie des fonctions holomorphes, et dépasse largement le cadre du programme.

Théorème II.11 (Régularité de la somme d'une série entière). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme égale à $A(x)$, pour $x \in]-R, R[$. Alors A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, et tout $x \in]-R, R[$,*

$$A^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+p)x^n.$$

Exemple II.12. *On retrouve la formule du binôme négatif, en dérivant p fois la relation*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

sur $[-1, 1[$, cette série entière étant de rayon 1.

Corollaire II.13 (Expression des coefficients d'une série entière). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme égale à $A(x)$, pour $x \in]-R, R[$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire II.14 (Unicité du développement en série entière).

1. *Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de sommes A et B, définies sur un intervalle $[0, \alpha]$ ($\alpha > 0$), et telles que $A = B$ sur $[0, \alpha]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.*

2. *En particulier, soit f une fonction de la variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie au moins sur un intervalle $[0, a]$, $a > 0$. S'il existe une suite (a_n) telle que*

$$\forall x \in [0, a], f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

alors cette suite est unique.

On termine par une étude de dérivabilité au bord, qui sera bien utile en probabilités, pour l'étude des séries génératrices de variables aléatoires, et le rapport avec les calculs d'espérance et de variance.

Proposition II.15 (Dérivabilité au bord, HP ?). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon R, et de somme $A(x)$, pour $x \in]-R, R[$.*

1. *Si $\sum a_n R^n$ et $\sum n a_n R^n$ convergent, alors A se prolonge par continuité en R en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R]$, et*

$$A'(R) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}.$$

2. *Réciproquement, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, que $\sum a_n R^n$ converge, ce qui permet de définir A sur $]-R, R]$. On suppose de plus que A est dérivable à gauche en R. Alors $\sum_{n \geq 1} n a_n R^{n-1}$ converge, et*

$$A'(R) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n R^{n-1}.$$

Éléments de preuve. 1. Dans le sens direct, c'est le théorème radial d'Abel et le théorème de la classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement (corollaire du théorème de la limite de la dérivée).
2. La démonstration du sens réciproque n'est pas exigible. Les hypothèses de positivité permettent d'obtenir la convexité sur $[0, R[$, donc aussi sur $[0, R[$. Majorer alors $\sum_{k=1}^{n} ka_k x^k$ par $A'(R)$, puis passer à la limite quand $x \to R^-$, puis quand $n \to +\infty$. □

Remarque II.16. *Ce théorème n'est explicitement au programme que dans un contexte de probabilités, avec un rayon $R = 1$, et des coefficients tous positifs. Il doit donc être en théorie redémontré dans toute autre circonstance, notamment le sens direct, lorsqu'on n'a pas l'hypothèse de positivité.*

Exercice II.17 (Principe du zéro isolé). *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$, et S sa somme. On suppose $S \neq 0$ et $S(0) = 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que S ne s'annule qu'en 0 sur l'intervalle $]-r, r[$ (on dit que 0 est un zéro isolé de S).*

Exercice II.18 (Équivalent en $+\infty$ de la somme d'une série entière). 1. *Déterminer le rayon de convergence de* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$.

2. *En notant $f(x)$ la somme de cette série, en déterminer un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$.*

III. Développements en séries entières

III.1 Généralités sur les fonctions développables en séries entières

Définition III.1 (Fonction développable en série entière). *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 (dans $\mathbb{K}$). On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0, s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $z \in \hat{B}(0, r)$,*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n.$$

Pour un $r > 0$ tel que cette égalité soit satisfaite, on dira que f est développable en série entière sur $\hat{B}(0, r)$.
Dans cette définition, si R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, on a nécessairement $r \leq R$, mais pas nécessairement l'égalité.

Proposition III.2 (CN, et unicité du développement en série entière). *Soit f une application définie au voisinage de 0 (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors, pour que f soit développable en série entière, la fonction de la variable réelle $f_{\mathbb{R}}$, définie au voisinage de 0 doit être de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le développement s'écrit alors*

$$\forall z \in \hat{B}(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{avec } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

En particulier, en cas d'existence, le développement en série entière est unique.

Remarque III.3 (Lien avec la série de Taylor). 1. *Lorsque f est DSE de la variable réelle, la série entière associée est nécessairement égale à la série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.*

2. *Réciproquement, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, la série de Taylor en 0 peut converger sur un intervalle $]-r, r[$ sans être égale à f. Dans ce cas, f ne peut pas être développable en série entière.*

Exemple III.4. *Soit f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que sa série de Taylor converge sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.*