Éléments de preuve. Montrer que le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$ converge uniformément vers 0, en faisant une transformation d'Abel, en écrivant $a_k R^k = R_k - R_{k+1}$, où

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k.$$

□

**Remarque II.4.** *1. Comme dit plus haut, ce résultat n'a d'intérêt que si la convergence n'est pas absolue. Dans le cas d'une CVA, le résultat obtenu est plus fort.*

*2. Attention à ne pas en conclure que $\sum a_n R^n$ converge uniformément au voisinage de $R$. Ceci est faux en général, et nécessiterait de maîtriser l'approche de $R$ dans toutes les directions (en restant dans le disque de convergence). Ici, on ne s'approche de $R$ qu'en suivant un rayon.*

## II.2 Continuité et limite radiale

Les études de convergence uniforme ci-dessus amènent directement les propriétés de continuité des séries entières.

**Théorème II.5** (Continuité d'une série entière). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Alors la fonction $A$ est continue sur $\hat{B}(0,R)$.*

**Remarque II.6.** *Si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, on a même la continuité de $A$ sur $\overline{B}(0,R)$.*

**Théorème II.7** (Théorème radial d'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors*

$$\lim_{x \to R} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n.$$

Éléments de preuve. La démonstration est HP, pour éviter le théorème de CVU sur un rayon, dont le théorème d'Abel radial est une conséquence immédiate par théorème de la double-limite.
Remarque : même si le théorème de CVU sur un rayon est HP, le théorème d'Abel radial est, lui, bien au programme. □

Autrement dit, en combinant les deux résultats précédents, si $\sum a_n z^n$ est de rayon $R$ et $\sum a_n R^n$ converge, la fonction de la variable réelle $x \mapsto \sum a_n x^n$ est continue sur $[0,R]$.

**Exemple II.8.** *On retrouve $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, connaissant le développement du logarithme sur $]-1,1[$.*
*Remarquez que la preuve qu'on en avait donnée reposait sur une transformation d'Abel. Il s'agissait donc en fait de la preuve du théorème d'Abel radial, exprimée dans cette situation particulière.*

**Remarque II.9.** *Le programme ne donne pas de résultat de primitivation spécifique aux séries entières, mais la convergence uniforme sur les $\overline{B}(0,r)$, $r < R$, permet d'utiliser le théorème de primitivation (et d'intégration) des suites de fonctions sur tout intervalle $[a,b] \subset [-R,R[$.*

## II.3 Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^\infty$

On rappelle que $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

**Proposition II.10** (Rayon de convergence des séries dérivées). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=p} n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+p)z^n$ est de rayon de convergence $R$.*