Proposition I.27 (Produit de Cauchy de deux séries entières). *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors le rayon de convergence R_c de $\sum c_n z^n$ vérifie $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Éléments de preuve. Les séries étant absolument convergentes, on peut faire le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ lorsque $|z| < \min(R_a, R_b)$. □

Remarque I.28 (Avertissement). *L'inégalité peut être stricte.*

Exemple I.29. *1. Rayon de convergence du produit de Cauchy de $\sum (-1)^n x^n$ et de $\sum \frac{1}{4^{\lfloor n/2 \rfloor}} x^n$*

2. Rayon de convergence du produit de Cauchy de $\sum (\delta_{n,0} + 2^n) z^n$ et $\sum (-1)^{\delta_{n,0}} z^n$.
Ce dernier exemple montre que le rayon de convergence du produit de Cauchy peut même être strictement plus grand que le plus grand des deux rayons

Remarque I.30. *On peut montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$, alors $R_c = \min(R_a, R_b)$.*

Exercice I.31 (Produit de Cauchy avec hypothèses étendues). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries convergentes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On suppose que $\sum c_k$ est également convergente. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.*

II. Régularité de la somme d'une série entière

II.1 Convergence uniforme

Théorème II.1 (Convergence uniforme locale sur le disque ouvert de convergence). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $\sum a_n z^n$ est normalement, donc aussi uniformément convergence sur tout disque $\hat{B}(0, r)$, avec $r < R$.*

Éléments de preuve. Comparer à $\sum |a_n| r^n$ qui converge puisque $\sum a_n z^n$ est absolument convergente dans $\hat{B}(0, R)$. □

Remarque II.2. *Si $\sum a_n R^n$ converge absolument, la preuve s'adapte facilement pour montrer que $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente sur le disque fermé $\overline{B}(0, R)$.*
Le cas où on a un point du disque en lequel on a une semi-convergence est plus délicat, mais on peut quand même en dire quelque chose. Quitte à faire une rotation (consistant à remplacer a_n par $a_n e^{in\theta}$), on peut supposer qu'on a convergence au point R.

Théorème II.3 (Convergence uniforme sur un rayon en un point de convergence, HP). *Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence $R < +\infty$. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le rayon $[0, R]$.*

Éléments de preuve. Montrer que le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$ converge uniformément vers 0, en faisant une transformation d'Abel, en écrivant $a_k R^k = R_k - R_{k+1}$, où

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k.$$

□

Remarque II.4. *1. Comme dit plus haut, ce résultat n'a d'intérêt que si la convergence n'est pas absolue. Dans le cas d'une CVA, le résultat obtenu est plus fort.*

2. Attention à ne pas en conclure que $\sum a_n R^n$ converge uniformément au voisinage de R. Ceci est faux en général, et nécessiterait de maîtriser l'approche de R dans toutes les directions (en restant dans le disque de convergence). Ici, on ne s'approche de R qu'en suivant un rayon.

II.2 Continuité et limite radiale

Les études de convergence uniforme ci-dessus amènent directement les propriétés de continuité des séries entières.

Théorème II.5 (Continuité d'une série entière). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Alors la fonction A est continue sur $\hat{B}(0,R)$.*

Remarque II.6. *Si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, on a même la continuité de A sur $\overline{B}(0,R)$.*

Théorème II.7 (Théorème radial d'Abel). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et de somme $A(z)$, pour $z \in \hat{B}(0,R)$. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors*

$$\lim_{x \to R} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n.$$

Éléments de preuve. La démonstration est HP, pour éviter le théorème de CVU sur un rayon, dont le théorème d'Abel radial est une conséquence immédiate par théorème de la double-limite.
Remarque : même si le théorème de CVU sur un rayon est HP, le théorème d'Abel radial est, lui, bien au programme. □

Autrement dit, en combinant les deux résultats précédents, si $\sum a_n z^n$ est de rayon R et $\sum a_n R^n$ converge, la fonction de la variable réelle $x \mapsto \sum a_n x^n$ est continue sur $[0,R]$.

Exemple II.8. *On retrouve $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, connaissant le développement du logarithme sur $]-1,1[$.*
Remarquez que la preuve qu'on en avait donnée reposait sur une transformation d'Abel. Il s'agissait donc en fait de la preuve du théorème d'Abel radial, exprimée dans cette situation particulière.

Remarque II.9. *Le programme ne donne pas de résultat de primitivation spécifique aux séries entières, mais la convergence uniforme sur les $\overline{B}(0,r)$, $r < R$, permet d'utiliser le théorème de primitivation (et d'intégration) des suites de fonctions sur tout intervalle $[a,b] \subset [-R,R[$.*

II.3 Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^\infty$

On rappelle que $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Proposition II.10 (Rayon de convergence des séries dérivées). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=p} n(n-1)\dots(n-p+1)z^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+p)z^n$ est de rayon de convergence R.*