- *Pour des séries à trous $\sum a_n z^{e(n)}$, on peut aussi essayer d'utiliser la règle de d'Alembert, directement sous cette forme (en considérant $\lim \left|\frac{a_{n+1}z^{e(n+1)}}{a_n z^{e(n)}}\right|$).*
- *De façon plus générale, étudier le domaine de concurrence par toute autre technique disponible, pour trouver le rayon qui sépare zone de concurrence et zone de divergence.*
- *On peut parfois s'en sortir avec juste quelques valeurs. Si on trouve par exemple z_1 et z_2 tels que $|z_1| = |z_2|$, et tels que $\sum a_n z_1^n$ converge, alors que $\sum a_n z_2^n$ diverge, alors $R = |z_1| = |z_2|$.*
- *Parfois une unique valeur peut suffire : la divergence non grossière de $\sum a_n z^n$ ou la semi-convergence de $\sum a_n z^n$ suffisent à savoir que z est sur le cercle limite. Ainsi, la divergence non grossière de $\sum \frac{1}{n}$ suffit à conclure que $\sum \frac{z^n}{n}$ est de rayon de convergence 1.*
- *On peut aussi revenir à la définition et étudier le caractère borné de $(a_n z^n)$, notamment à l'aide des croissances comparées.*
- *Enfin, dans des situations un peu plus abstraites on pourra procéder par comparaisons.*

Exercice I.25 (Rayons de convergence)**.** *Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum a_n z^n$ et étude de la convergence en R et $-R$, où a_n est donné par :*

1. $a_n = \frac{\mathrm{ch}\, n}{n}$
2. $a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
3. $a_n = [e^n]$
4. $a_n = n$*-ième décimale de* π
5. $a_n = \sin n$
6. $a_n = \frac{\cos^2 n}{n}$
7. $a_n =$ *nombre de diviseurs* ≥ 1 *de* n
8. $a_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$
9. $a_{2n} = 0$; $a_{2n+1} = 5^n$
10. $a_n^2 = n!$; $a_n = 0$ *dans les autres cas.*

I.3 Opérations sur les séries entières

Proposition I.26 (Somme de deux séries entières)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b.*

1. *Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.*
2. *Si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie l'égalité $R = \min(R_a, R_b)$.*
3. *Si $R_a = R_b$, l'inégalité peut être stricte.*

Évidemment, on a alors, pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n.$$

Proposition I.27 (Produit de Cauchy de deux séries entières). *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors le rayon de convergence R_c de $\sum c_n z^n$ vérifie $R_c \geq \min(R_a, R_b)$, et pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Éléments de preuve. Les séries étant absolument convergentes, on peut faire le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ lorsque $|z| < \min(R_a, R_b)$. □

Remarque I.28 (Avertissement). *L'inégalité peut être stricte.*

Exemple I.29. *1. Rayon de convergence du produit de Cauchy de $\sum (-1)^n x^n$ et de $\sum \frac{1}{4^{\lfloor n/2 \rfloor}} x^n$*

2. Rayon de convergence du produit de Cauchy de $\sum (\delta_{n,0} + 2^n) z^n$ et $\sum (-1)^{\delta_{n,0}} z^n$.
Ce dernier exemple montre que le rayon de convergence du produit de Cauchy peut même être strictement plus grand que le plus grand des deux rayons

Remarque I.30. *On peut montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$, alors $R_c = \min(R_a, R_b)$.*

Exercice I.31 (Produit de Cauchy avec hypothèses étendues). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries convergentes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On suppose que $\sum c_k$ est également convergente. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.*

II. Régularité de la somme d'une série entière

II.1 Convergence uniforme

Théorème II.1 (Convergence uniforme locale sur le disque ouvert de convergence). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $\sum a_n z^n$ est normalement, donc aussi uniformément convergence sur tout disque $\hat{B}(0, r)$, avec $r < R$.*

Éléments de preuve. Comparer à $\sum |a_n| r^n$ qui converge puisque $\sum a_n z^n$ est absolument convergente dans $\hat{B}(0, R)$. □

Remarque II.2. *Si $\sum a_n R^n$ converge absolument, la preuve s'adapte facilement pour montrer que $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente sur le disque fermé $\overline{B}(0, R)$.*
Le cas où on a un point du disque en lequel on a une semi-convergence est plus délicat, mais on peut quand même en dire quelque chose. Quitte à faire une rotation (consistant à remplacer a_n par $a_n e^{in\theta}$), on peut supposer qu'on a convergence au point R.

Théorème II.3 (Convergence uniforme sur un rayon en un point de convergence, HP). *Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence $R < +\infty$. On suppose que $\sum a_n R^n$ converge. Alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le rayon $[0, R]$.*