On étudie dans ce chapitre un cas particulier important de séries de fonctions : les séries entières, de la forme $\sum a_n x^n$. Ces séries apparaissent notamment de façon naturel comme prolongement à l'infini de développements limités en 0, et on peut donc légitimement se demander si une fonction f de classe C^∞ peut s'écrire, au moins localement, sous forme d'une série entière, qui correspondrait au prolongement infini de ses développements limités (donc de la formule de Taylor-Young), c'est-à-dire à sa série de Taylor. Nous nous intéresserons à cette question en fin de chapitre, après avoir donné les définitions et les propriétés générales liées à la convergence, ainsi qu'à la régularité de la somme.
Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions, convergence

I.1 Définition

Définition I.1 (Série entière). *la forme*

- *Une série entière est une suite de fonctions $\sum f_n$ où (f_n) est de*

$$f_n : x \mapsto a_n x^n,$$

avec $(a_n) \in K^N$.

- *On note $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite (a_n), ou éventuellement $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ si l'indexation commence au rang n_0.*

Remarque I.2 (Variable réelle ou complexe). *On utilise généralement la notation $\sum a_n z^n$ lorsqu'on considère la série de la variable complexe $z \in C$, et $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n t^n$ lorsqu'on considère la série de la variable réelle x ou t dans $\mathbb{R}$ (y compris si les coefficients a_n sont complexes).*

Remarque I.3 (Avertissement). *Les coefficients a_n doivent être indépendants de la variable z (ou x ou t).*

Exemple I.4. *Les séries de fonctions suivantes sont-elles des séries entières ?*

1. $\sum z^n$
2. $\sum n z^n$
3. $\sum n z^{n-1}$
4. $\sum n z^{n-2}$
5. $\sum \ln(n) z^n$
6. $\sum 2^z z^n$

I.2 Domaine de convergence, rayon de convergence

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les séries entières ont un domaine de convergence d'une forme très précise : il s'agit de disques centrés en 0, contenant ou non certains points de leurs bords. Ce disque peut éventuellement être réduit à un point, ou inclure $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tout entier. Le point clé pour obtenir cette description est le lemme d'Abel.
Dans toute cette section, $\sum a_n z^n$ désigne une série entière sur $\mathbb{K}$.

Lemme I.5 (Abel). *Soit $z_0 \in K$. Si $(a_n z_0^n)_{n \in N}$ est bornée, alors pour tout $z \in \hat{B}(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Éléments de preuve. Écrire $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ □

Remarque I.6. *En particulier, si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $\hat{B}(0, |z_0|)$.*

Le lemme d'Abel motive la définition suivante.

Définition I.7 (Rayon de convergence)**.** *On appelle rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ l'élément suivant, bien défini dans $\mathbb{R}_\pm$:*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}.$$

Exemple I.8. *1. Rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, à partir de la définition.*

2. Rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$

3. Rayon de convergence de $\sum n! z^n$.

Par convention, si $R = +\infty$, $\hat{B}(0, R)$ désigne $\mathbb{K}$ tout entier, et si $R = 0$, $\hat{B}(0, R) = \emptyset$. De la définition-même résulte la propriété suivante.

Proposition I.9 (Rayon de $\sum \lambda a_n z^n$)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

Théorème I.10 (Domaine de convergence d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

1. *La série $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $\hat{B}(0, R)$ (i.e. si $|z| < R$).*
2. *La série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement si $|z| > R$.*
3. *La convergence pour $|z| = R$ peut varier suivant les séries et suivant la valeur de z. $\hat{B}(0, R)$ est appelé disque ouvert (ou intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$) de convergence de la série entière*

$$\sum a_n z^n,$$

et est parfois aussi noté $D_O(0, R)$.

Éléments de preuve. Pour $z \in B(0, R)$, considérer r tel que $|z| < r < R$, et appliquer le lemme d'Abel. □

Remarque I.11. *Le théorème de convergence des séries entières donne un moyen de déterminer le rayon de convergence, par étude directe du domaine de convergence. Le rayon R délimite alors la zone de convergence et la zone de divergence. Il n'est pas nécessaire d'étudier toutes les propriétés de convergence : par exemple, trouver un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, mais $\sum a_n z^n$ diverge si $|z| > |z_0|$ permet de déterminer R.*

Exemple I.12. *1. Reprendre les exemples précédents.*

2. Rayon de convergence de $\sum \ln(n) z^{n^2}$

3. Étude sur le cercle des séries suivantes :

(a) $\sum z^n$
(b) $\sum \frac{z^n}{n^2}$
(c) $\sum \frac{z^n}{n}$.

Remarque I.13. *Si $\sum a_n R^n$ converge absolument, alors $\sum a_n z^n$ est convergente (absolument) sur $\overline{B}(0, R)$. Si $\sum a_n R^n$ diverge grossièrement, alors $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement) sur $\mathbb{K}\backslash B(0, R)$.*

Corollaire I.14 (Rayon de convergence associé à une suite de somme convergente)**.** *Soit (a_n) telle que $\sum a_n$ converge. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est au moins égal à 1.*

Nous recouterons cette situation en probabilités : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela permet de s'assurer que le rayon de convergence de $\sum P(X=n)t^n$ est au moins égal à 1. Cette série est appelée série génératrice de la variable aléatoire X.
Nous donnons maintenant quelques moyens de calcul du rayon de convergence. Nous ferons un bilan de ces méthodes en fin de paragraphe.

Proposition I.15 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}_+$. Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell} \in \mathbb{R}_+$.*

Remarque I.16. *Ainsi, sous réserve d'existence de cette limite, $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Le programme officiel stipule que « la limite du rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ peut être utilisée directement. »*

Exemple I.17. *Rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^n$.*

Remarque I.18 (Avertissement)**.** *Attention au fait qu'il est important ici que l'indice de a_n corresponde bien à l'exposant en z. Le résultat ne peut pas être mis en oeuvre pour des séries « à trous ».*

Exemple I.19.
1. *Rayon de convergence de $\sum \binom{2n}{n} z^{2n+1}$.*
2. *Rayon de convergence de $\sum e^n z^n$.*

Exercice I.20 (Rayon de convergence d'une série entière)**.** *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et (b_n) définie par $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$. Quel est le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$?*

Les propriétés suivantes permettent de comparer les rayons de convergence de deux séries entières.

Théorème I.21 (Théorème de comparaison des rayons de convergence)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons respectifs R_a et R_b, et $n_0 \in \mathbb{N}$.*

1. *Si pour tout $n \geq n_0$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.*
2. *Si $a_n = O(b_n)$ (a fortiori si $a_n = o(b_n)$), alors $R_a \geq R_b$.*
3. *Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.*

Éléments de preuve. Pour 1, on peut revenir à la définition. Pour 2, on se ramène à 1, en utilisant la comparaison des rayons de $\sum b_n z^n$ et de $\sum M b_n z^n$. Le 3 résulte directement de 2. □

Corollaire I.22. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $\sum_{n\geq n_0} n a_n z^n$ est de rayon de convergence R.*

Éléments de preuve. Une inégalité provient de la comparaison $a_n = O(na_n)$. La deuxième s'obtient par comparaison de $na_n z^n$ à $a_n r^n$, pour $|z| < r < R$. □

Exemple I.23.
1. *$\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.*
2. *$\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont même rayon de convergence.*
3. *Pour toute fraction rationnelle F non nulle, et n_0 assez grand, $\sum_{n\geq n_0} F(n) a_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.*

Méthode I.24 (Déterminer un rayon de convergence)**.**
- *On pourra toujours commencer par simplifier l'expression en remplaçant a_n par un équivalent (sans condition de signe).*
- *Dans les situations concrètes, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite dans $\mathbb{R}_+$, utiliser la règle de d'Alembert. Veillez à ce que la série soit bien de la forme $\sum a_n z^n$.*

- *Pour des séries à trous $\sum a_n z^{e(n)}$, on peut aussi essayer d'utiliser la règle de d'Alembert, directement sous cette forme (en considérant $\lim \left|\frac{a_{n+1}z^{e(n+1)}}{a_n z^{e(n)}}\right|$).*
- *De façon plus générale, étudier le domaine de concurrence par toute autre technique disponible, pour trouver le rayon qui sépare zone de concurrence et zone de divergence.*
- *On peut parfois s'en sortir avec juste quelques valeurs. Si on trouve par exemple z_1 et z_2 tels que $|z_1| = |z_2|$, et tels que $\sum a_n z_1^n$ converge, alors que $\sum a_n z_2^n$ diverge, alors $R = |z_1| = |z_2|$.*
- *Parfois une unique valeur peut suffire : la divergence non grossière de $\sum a_n z^n$ ou la semi-convergence de $\sum a_n z^n$ suffisent à savoir que z est sur le cercle limite. Ainsi, la divergence non grossière de $\sum \frac{1}{n}$ suffit à conclure que $\sum \frac{z^n}{n}$ est de rayon de convergence 1.*
- *On peut aussi revenir à la définition et étudier le caractère borné de $(a_n z^n)$, notamment à l'aide des croissances comparées.*
- *Enfin, dans des situations un peu plus abstraites on pourra procéder par comparaisons.*

Exercice I.25 (Rayons de convergence)**.** *Déterminer le rayon de convergence R des séries entières $\sum a_n z^n$ et étude de la convergence en R et $-R$, où a_n est donné par :*

1. $a_n = \frac{\mathrm{ch}\, n}{n}$
2. $a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
3. $a_n = [e^n]$
4. $a_n = n$*-ième décimale de* π
5. $a_n = \sin n$
6. $a_n = \frac{\cos^2 n}{n}$
7. $a_n =$ *nombre de diviseurs* ≥ 1 *de* n
8. $a_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$
9. $a_{2n} = 0$; $a_{2n+1} = 5^n$
10. $a_n^2 = n!$; $a_n = 0$ *dans les autres cas.*

I.3 Opérations sur les séries entières

Proposition I.26 (Somme de deux séries entières)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b.*

1. *Le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.*
2. *Si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence R de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie l'égalité $R = \min(R_a, R_b)$.*
3. *Si $R_a = R_b$, l'inégalité peut être stricte.*

Évidemment, on a alors, pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n.$$