On étudie dans ce chapitre un cas particulier important de séries de fonctions : les séries entières, de la forme $\sum a_n x^n$. Ces séries apparaissent notamment de façon naturel comme prolongement à l'infini de développements limités en 0, et on peut donc légitimement se demander si une fonction f de classe C^∞ peut s'écrire, au moins localement, sous forme d'une série entière, qui correspondrait au prolongement infini de ses développements limités (donc de la formule de Taylor-Young), c'est-à-dire à sa série de Taylor. Nous nous intéresserons à cette question en fin de chapitre, après avoir donné les définitions et les propriétés générales liées à la convergence, ainsi qu'à la régularité de la somme.
Dans tout ce chapitre, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Définitions, convergence

I.1 Définition

Définition I.1 (Série entière). *la forme*

- *Une série entière est une suite de fonctions $\sum f_n$ où (f_n) est de*

$$f_n : x \mapsto a_n x^n,$$

avec $(a_n) \in K^N$.

- *On note $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite (a_n), ou éventuellement $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ si l'indexation commence au rang n_0.*

Remarque I.2 (Variable réelle ou complexe). *On utilise généralement la notation $\sum a_n z^n$ lorsqu'on considère la série de la variable complexe $z \in C$, et $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n t^n$ lorsqu'on considère la série de la variable réelle x ou t dans $\mathbb{R}$ (y compris si les coefficients a_n sont complexes).*

Remarque I.3 (Avertissement). *Les coefficients a_n doivent être indépendants de la variable z (ou x ou t).*

Exemple I.4. *Les séries de fonctions suivantes sont-elles des séries entières ?*

1. $\sum z^n$
2. $\sum n z^n$
3. $\sum n z^{n-1}$
4. $\sum n z^{n-2}$
5. $\sum \ln(n) z^n$
6. $\sum 2^z z^n$

I.2 Domaine de convergence, rayon de convergence

Nous allons montrer dans ce paragraphe que les séries entières ont un domaine de convergence d'une forme très précise : il s'agit de disques centrés en 0, contenant ou non certains points de leurs bords. Ce disque peut éventuellement être réduit à un point, ou inclure $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tout entier. Le point clé pour obtenir cette description est le lemme d'Abel.
Dans toute cette section, $\sum a_n z^n$ désigne une série entière sur $\mathbb{K}$.

Lemme I.5 (Abel). *Soit $z_0 \in K$. Si $(a_n z_0^n)_{n \in N}$ est bornée, alors pour tout $z \in \hat{B}(0, |z_0|)$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Éléments de preuve. Écrire $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ □