V. Identités obtenues par développement

Définition V.1 (Fonction zêta de Riemann)**.** *La **fonction zêta de Riemann** est définie pour $\Re(s) > 1$ par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Exercice V.2. *Calculer $\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n) - 1)$.*

Définition V.3 (Indicatrice d'Euler)**.** *La **fonction indicatrice d'Euler** $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est définie par :*

$$\varphi(n) = \mathit{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \mathit{pgcd}(k, n) = 1\}.$$

Exercice V.4. *Calculer :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1}.$$

Définition V.5 (Constante d'Euler)**.** *La **constante d'Euler** γ est définie par :*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Exercice V.6. *a) Montrer que l'on a : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.*

b) La famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{n\geq 1, k\geq 2}$ est-elle sommable ? Et si l'on se restreint à $n \geq 2$?

c) Montrer que $\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$.