III.2 Lien avec la fonction exponentielle

Théorème III.5 (Développements de exp, cos, sin)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Éléments de preuve. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, en majorant le reste. □

Corollaire III.6. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e(z) = e^z$, i.e. :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Le théorème précédent le donne pour les réels et pour les imaginaires pures. Terminer en utilisant la propriété remarquable de l'exponentielle. □

Méthode III.7 (Calcul de $\sum P(n)\frac{x^n}{n!}$)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Décomposer P sur la base $1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)\ldots(X-n+1)$, séparer, simplifier les termes supérieurs de la factorielle.*

Exemple III.8.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (n^3+1)\frac{2^n}{n!}.$$

IV. Dérivée des séries géométriques

On justifie dans ce paragraphe que la série géométrique peut être dérivée terme à terme de la variable complexe z, en dérivant le monôme z^n de la même manière que pour les réels. Sachant exprimer (et dériver comme dans $\mathbb{R}$) la somme géométrique, ce résultat s'exprime ainsi :

Théorème IV.1 (Formule du binôme négatif)**.** *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout nombre complexe tel que $|z| < 1$, la série ci-dessous est absolument convergente, et*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}.$$

Cette formule peut se réécrire

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

Éléments de preuve. Récurrence sur p, en multipliant à chaque étape par la série géométrique, à l'aide d'un produit de Cauchy. □

Le cas réel se montre aussi par Taylor avec reste intégral, et s'adapte de façon plus générale au développement de $(1+x)^\alpha$.

Méthode IV.2 (Calcul de $\sum P(n)x^n$)**.** *($P \in \mathbb{C}_n[X], x \in B(0,1)$) Décomposer P sur la base $(X+1)(X+2)\ldots(X+n)$, séparer, cela nous ramène à des sommes du binôme négatif.*

Exemple IV.3.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+2}{3^n}.$$

V. Identités obtenues par développement

Définition V.1 (Fonction zêta de Riemann)**.** *La **fonction zêta de Riemann** est définie pour $\Re(s) > 1$ par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Exercice V.2. *Calculer $\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n) - 1)$.*

Définition V.3 (Indicatrice d'Euler)**.** *La **fonction indicatrice d'Euler** $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est définie par :*

$$\varphi(n) = \mathit{Card}\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \mathit{pgcd}(k, n) = 1\}.$$

Exercice V.4. *Calculer :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1}.$$

Définition V.5 (Constante d'Euler)**.** *La **constante d'Euler** γ est définie par :*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Exercice V.6. *a) Montrer que l'on a : $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.*

b) La famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{n\geq 1, k\geq 2}$ est-elle sommable ? Et si l'on se restreint à $n \geq 2$?

c) Montrer que $\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$.