Pour une série $\sum a_n$, on note :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

les sommes partielles, et $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ les sommes (lorsqu'elles existent).

Exercice II.48. *Donner un exemple de deux séries convergentes dont le produit de Cauchy diverge.*

Exercice II.49 (Cesàro). *Soient $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ trois séries convergentes avec $c = a \star b$. Montrer que $C = AB$ en vérifiant que $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$.*

Exercice II.50 (Cauchy-Mertens). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques convergentes, la première étant absolument convergente. On se propose de montrer que leur série produit de Cauchy $c = a \star b$ converge vers le produit AB de leurs sommes respectives.*

a) Montrer que l'on peut supposer $B = 0$.

b) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$ et montrer que cette suite tend vers 0. Conclure.

Exercice II.51 (Pringsheim). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles décroissant vers 0, et $w = u \star v$. Montrer que $\sum (-1)^{n-1} w_n$ converge si et seulement si la suite (w_n) tend vers 0.*

Exercice II.52. *Étudier la sommabilité des familles :*

$$\left(\frac{1}{(m+n)^a}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}, \quad a > 0; \qquad \left(\frac{1}{(m^2 - mn + n^2)^a}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}.$$

Exercice II.53. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que, pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$, on ait $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que, pour $\alpha > 2$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^{-\alpha}$ converge.*

III. Autour de la série exponentielle

III.1 La série exponentielle

Définition III.1 (série exponentielle). *La série exponentielle de paramètre $z \in \mathbb{C}$ est la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$.*

Théorème III.2 (Convergence de la série exponentielle). *La série exponentielle est absolument convergente, quelle que soit la valeur de $z \in \mathbb{C}$. Sa somme définit une fonction notée momentanément*

$$e(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème III.3 (Propriété remarquable de l'exponentielle). *Soit z et z' deux complexes. Alors*

$$e(z+z') = e(z)e(z').$$

Éléments de preuve. Calculez $e(z)e(z')$ sous forme d'un produit de Cauchy. □

Corollaire III.4 (Propriété de morphisme de l'exponentielle). *e est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Éléments de preuve. Il reste à vérifier que e est bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. La propriété remarquable et le fait que $e(0) = 1$ nous assure de l'inversibilité de $e(z)$. □

III.2 Lien avec la fonction exponentielle

Théorème III.5 (Développements de exp, cos, sin)**.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Éléments de preuve. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, en majorant le reste. □

Corollaire III.6. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e(z) = e^z$, i.e. :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Éléments de preuve. Le théorème précédent le donne pour les réels et pour les imaginaires pures. Terminer en utilisant la propriété remarquable de l'exponentielle. □

Méthode III.7 (Calcul de $\sum P(n)\frac{x^n}{n!}$)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Décomposer P sur la base $1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)\ldots(X-n+1)$, séparer, simplifier les termes supérieurs de la factorielle.*

Exemple III.8.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (n^3+1)\frac{2^n}{n!}.$$

IV. Dérivée des séries géométriques

On justifie dans ce paragraphe que la série géométrique peut être dérivée terme à terme de la variable complexe z, en dérivant le monôme z^n de la même manière que pour les réels. Sachant exprimer (et dériver comme dans $\mathbb{R}$) la somme géométrique, ce résultat s'exprime ainsi :

Théorème IV.1 (Formule du binôme négatif)**.** *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout nombre complexe tel que $|z| < 1$, la série ci-dessous est absolument convergente, et*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)z^{n-p} = \frac{p!}{(1-z)^{p+1}}.$$

Cette formule peut se réécrire

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} z^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

Éléments de preuve. Récurrence sur p, en multipliant à chaque étape par la série géométrique, à l'aide d'un produit de Cauchy. □

Le cas réel se montre aussi par Taylor avec reste intégral, et s'adapte de façon plus générale au développement de $(1+x)^\alpha$.

Méthode IV.2 (Calcul de $\sum P(n)x^n$)**.** *($P \in \mathbb{C}_n[X], x \in B(0,1)$) Décomposer P sur la base $(X+1)(X+2)\ldots(X+n)$, séparer, cela nous ramène à des sommes du binôme négatif.*

Exemple IV.3.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+2}{3^n}.$$