On montre le théorème d'associativité ci-dessous, qui est en fait un théorème de sommation par paquets.

Théorème II.27 (Associativité pour les familles positives)**.** *Soit I un ensemble quelconque, $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right).$$

Éléments de preuve. Tout sous-ensemble fini J de I est réunion disjointe des $J\cap I_k$ qui sont eux-mêmes finis et dont seul un nombre fini est non vide. Cela donne une première inégalité en passant au sup.
Réciproquement, partir de $K'\subset K$ fini, et $I'_k\subset I_k$ finis. La somme sur les indices correspondants est majorée par la somme totale (dans $\mathbb{R}_+$) passer au sup pour récupérer chacun des I_k. Puis encore le sup pour récupérer K. □

Exemple II.28. *Montrer la divergence de la série harmonique en utilisant la sommation par paquets avec les paquets :*

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad J_k = [2^k, 2^{k+1}-1].$$

Corollaire II.29 (Théorème de Fubini positif)**.** *Soit I et J deux ensembles quelconques, et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Éléments de preuve. Il suffit d'écrire $I\times J = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times J = \bigcup_{j\in J} I\times\{j\}$. □

Corollaire II.30. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives d'éléments de $\mathbb{R}_+$, et $\lambda > 0$. Alors*

$$\sum_{i\in I}(a_i+\lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda\sum_{i\in I} b_i.$$

Éléments de preuve. C'est Fubini, avec $J=\{1,2\}$ (pour séparer a_i et b_i). Sortir λ ne pose pas de problème. Cette relation est valide dans $\mathbb{R}_+$, les termes eux-mêmes pouvant être infinis. En particulier, on obtient alors : □

Corollaire II.31. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives sommables, et $\lambda > 0$. Alors $(a_i+\lambda b_i)$ est aussi sommable.*

II.6 Famille sommable de nombres complexes

Définition II.32 (Famille sommable)**.**

- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille de réels positifs $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, i.e. si $\sum_{i\in I}|a_i| < +\infty$.*
- *On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indexées sur I. Pour être plus précis, on peut noter $\ell^1(I,X)$ l'ensemble des familles sommables indexées sur I à valeurs dans $X\subset\mathbb{C}$.*

Remarque II.33.

- *Toute famille finie est sommable.*
- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi $\sum a_n$ est absolument convergente.*

Proposition II.34 (Sommabilité des sous-familles). *Toute sous-famille $(a_j)_{j\in J}$ ($J \subset I$) d'une famille sommable est sommable.*

Théorème II.35 (Théorème de comparaison). *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs tels que pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ l'est aussi.*

Éléments de preuve. Sommer les inégalités. □

Proposition II.36 (Caractérisation de la sommabilité par Re, Im, + et -).

- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ le sont.*
- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable ssi $(Re(a_i))_{i\in I}$ et $(Im(a_i))_{i\in I}$ le sont.*

Éléments de preuve. Dans un sens, les parties positives ou négatives se majorent en fonction de $|a_i|$. Dans l'autre, écrire le module comme somme de a_i^+ et a_i^-. Pour le cas complexe, c'est un peu similaire, mais en majorant le module cette fois par la somme des valeurs absolues de la partie réelle et de la partie imaginaire. □

Définition II.37 (Somme d'une famille sommable de réels, de complexes).

- *Soit $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I, \mathbb{R})$. On définit :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-.$$

- *Soit $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$. On définit :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} Re(a_i) + i \sum_{i\in I} Im(a_i).$$

Proposition II.38 (Caractérisation par ε de la somme). *Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ et $S \in \mathbb{C}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(a_i)_{i\in I} \in \ell^1(I, \mathbb{C})$, *et* $S = \sum_{i\in I} a_i$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J_\varepsilon \in P_f(I)$ tel que pour tout $K \in P_f(I)$ vérifiant $J_\varepsilon \subset K$,

$$\left| S - \sum_{i\in K} a_i \right| \leq \varepsilon.$$

Éléments de preuve. Pour le sens direct, commencer par le cas de familles de réels : pour le sens direct, remarquer que $I = I_+ \cup I_-$, où I_+ est l'ensemble des indices tels que $a_i \geq 0$, et I_- l'ensemble des indices tels que $a_i < 0$. Approcher $\sum_{i\in I} a_i^+$ et $\sum_{i\in I} a_i^-$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près par des sommes finies sur des sous-ensembles de I_+ et I_-.
Toujours pour le sens direct dans le cas complexe, utiliser le cas réel sur $(Re(a_i))_{i\in I}$ et $(Im(a_i))_{i\in I}$, puis considérer l'union des $J_{\varepsilon/2}$ et $J'_{\varepsilon/2}$ associés.
Réciproquement, si S et S' vérifient tous deux cette propriété, en considérant J_ε et J'_ε associés à chacun des deux complexes S et S', et $K = J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon$, montrer que $|S - S'| \leq 2\varepsilon$. □

Théorème II.39 (Linéarité de la somme). *L'ensemble $\ell^1(I)$ est un C-espace vectoriel, et $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i$ est une forme linéaire sur $\ell^1(I)$.*

En d'autres termes, si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de complexes, et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(a_i + \lambda b_i)_{i\in I}$ est encore sommable, et

$$\sum_{i\in I}(a_i + \lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda \sum_{i\in I} b_i.$$

Éléments de preuve. La sommabilité de la combinaison linéaire est évidente par majoration du module par la somme. La linéarité se montre alors facilement à l'aide de la caractérisation précédente. □

Proposition II.40 (Cas des séries). *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si elle est absolument convergente. On a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

De plus, la somme est invariante par permutation des termes.

Éléments de preuve. L'invariance par permutation peut s'obtenir en deux temps, d'abord pour les séries réelles (en utilisant l'invariance par permutation des sommes des a_n^+ et des a_n^-), puis pour les séries complexes (en utilisant l'invariance par permutation des sommes des $\mathrm{Re}(a_n)$ et des $\mathrm{Im}(a_n)$). On peut aussi l'obtenir en une fois par la caractérisation ci-dessus par ϵ, qui est indépendante d'un ordre qu'on se serait donné sur les éléments de I. □

Théorème II.41 (Associativité pour les familles sommables). *Soit $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. Alors a est sommable si et seulement chaque $(a_i)_{i\in I_k}$ $(k \in K)$ est sommable, de somme s_k et de somme absolue t_k, et si la famille $(t_k)_{k\in K}$ est sommable. Dans ce cas, (s_k) est également sommable, et :*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} s_k = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} a_i.$$

Éléments de preuve. En décomposant en partie réelle et partie imaginaire, on peut se contenter du cas où les a_i sont réels. En décomposant en partie positive et partie négative, on peut se ramener au cas positif, qu'on a déjà traité. Pour comparer les sommabilités, regarder dans ce cas les conditions pour obtenir une somme finie. □

Exemple II.42. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :*

$$S_n = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid 2n_1 + 3n_2 + 5n_3 = n\}, \quad s_n = \mathit{Card}(S_n).$$

Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}.$$

Corollaire II.43 (Théorème de Fubini). *Soit I et J et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels ou complexes.*

- *Alors $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et seulement si pour tout $i \in I$, $(a_{i,j})_{j\in J}$ est sommable, et $\left(\sum_{j\in J} |a_{i,j}|\right)_{i\in I}$ est sommable.*
- *On obtient une CNS de sommabilité similaire en intervertissant i et j.*

- *En cas de sommabilité, on a alors :*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Éléments de preuve. Comme avant, il suffit d'écrire $I \times J = \bigsqcup_{i\in I}\{i\} \times J = \bigsqcup_{j\in J} I \times \{j\}$. La sommabilité peut s'exprimer sur les sommes simples successives plutôt que sur la famille doublement indexée, en vertu du théorème d'associativité. □

Exercice II.44. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$. Montrer que la famille $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.*

Théorème II.45 (Produit de familles sommables)**.** *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right).$$

Ce résultat se généralise évidemment à un produit d'un plus grand nombre de familles.

Éléments de preuve. La sommabilité peut s'obtenir par l'équivalence exprimée dans le théorème d'associativité (remarque faite après Fubini), ou de façon directe, en majorant la somme des $|a_i b_j|$ sur un sous-ensemble fini de $I \times J$ par la somme sur un produit cartésien fini $I' \times J'$. L'égalité résulte ensuite du théorème de Fubini et de la linéarité. □

Lorsque $I = J = \mathbb{N}$, on repartitionne souvent ensuite $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en diagonales. On obtient :

Exemple II.46. *Soit $q \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$ en utilisant une représentation graphique et la sommation par paquets.*

Théorème II.47 (Produit de Cauchy)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Alors $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente, et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Éléments de preuve. Les hypothèses de sommabilité et le résultat précédent sur le produit de familles sommables assurent la sommabilité de $(a_n b_m)_{(n,m)\in\mathbb{N}}$. Utiliser le théorème d'associativité en partitionnant par les diagonales. □

Exercises :

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries. Le **produit de Cauchy** de ces deux séries est la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ définie par :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

On note souvent $c = a \star b$.

Pour une série $\sum a_n$, on note :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

les sommes partielles, et $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ les sommes (lorsqu'elles existent).

Exercice II.48. *Donner un exemple de deux séries convergentes dont le produit de Cauchy diverge.*

Exercice II.49 (Cesàro). *Soient $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ trois séries convergentes avec $c = a \star b$. Montrer que $C = AB$ en vérifiant que $C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$.*

Exercice II.50 (Cauchy-Mertens). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques convergentes, la première étant absolument convergente. On se propose de montrer que leur série produit de Cauchy $c = a \star b$ converge vers le produit AB de leurs sommes respectives.*

a) Montrer que l'on peut supposer $B = 0$.

b) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$ et montrer que cette suite tend vers 0. Conclure.

Exercice II.51 (Pringsheim). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles décroissant vers 0, et $w = u \star v$. Montrer que $\sum (-1)^{n-1} w_n$ converge si et seulement si la suite (w_n) tend vers 0.*

Exercice II.52. *Étudier la sommabilité des familles :*

$$\left(\frac{1}{(m+n)^a}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}, \quad a > 0; \qquad \left(\frac{1}{(m^2 - mn + n^2)^a}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}.$$

Exercice II.53. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que, pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$, on ait $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que, pour $\alpha > 2$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^{-\alpha}$ converge.*

III. Autour de la série exponentielle

III.1 La série exponentielle

Définition III.1 (série exponentielle). *La série exponentielle de paramètre $z \in \mathbb{C}$ est la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$.*

Théorème III.2 (Convergence de la série exponentielle). *La série exponentielle est absolument convergente, quelle que soit la valeur de $z \in \mathbb{C}$. Sa somme définit une fonction notée momentanément*

$$e(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème III.3 (Propriété remarquable de l'exponentielle). *Soit z et z' deux complexes. Alors*

$$e(z+z') = e(z)e(z').$$

Éléments de preuve. Calculez $e(z)e(z')$ sous forme d'un produit de Cauchy. □

Corollaire III.4 (Propriété de morphisme de l'exponentielle). *e est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.*

Éléments de preuve. Il reste à vérifier que e est bien à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. La propriété remarquable et le fait que $e(0) = 1$ nous assure de l'inversibilité de $e(z)$. □