Cette preuve est connue sous le nom d'« argument diagonal de Cantor », dont une généralisation donne un deuxième élément de réponse à la question initiale :

Théorème II.17 (Cantor, HP)**.** *Soit X un ensemble infini. Alors $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$ (i.e. X est subpotent à $\mathcal{P}(X)$, mais pas équipotent)*

Éléments de preuve. S'il existe une surjection $f : X \to P(X)$, considérer $Y \subset X$ constitué des éléments x tels que $x \notin f(x)$, et obtenir une contradiction en considérant l'appartenance de c à Y, c étant un élément de X tel que $f(c) = Y$. □

On peut donc construire une chaîne infinie d'ensembles ayant des cardinaux strictement croissants. Il y a donc une infinité de cardinaux infinis distincts.

Remarque II.18. *En quoi le résultat précédent empêche-t-il l'existence d'un « ensemble des ensembles » ?*

Familles sommables

Il n'est pas très dur de remarquer qu'en général, changer l'ordre de sommation dans une série modifie la valeur de la somme et même les propriétés de convergence (lorsque la série est semi-convergente initialement). Ainsi, l'ordre dans lequel s'effectue la sommation semble avoir une importance. Dans de nombreuses situations pourtant, on souhaite sommer des valeurs sans avoir un ordre privilégié. C'est le cas par exemple pour les calculs de probabilités, ou d'espérance, n'ayant pas d'ordre privilégié sur l'ensemble des valeurs prises par une variable X, n'ayant pas la possibilité en général de les numéroter dans l'ordre croissante, s'il y a des points d'accumulation). Nous présentons dans ce chapitre un moyen de s'affranchir de cet ordre de sommation sous certaines hypothèses.

II.5 Familles sommables de nombres réels positifs

On rappelle que l'opération $a + \infty$ est bien définie, égale à $+\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. En particulier, tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}_+$ peut être sommé dans $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, $\mathbb{R}_+$ peut être muni d'une relation d'ordre total prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}_+$ en posant $+\infty > a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Tout sous-ensemble X de $\mathbb{R}_+$ admet alors une borne supérieur dans $\mathbb{R}_+$ muni de cet ordre :

- s'il est non vide et majoré par un réel, d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$
- s'il est non vide et majoré par aucun réel, alors $+\infty$ est son seul majorant, donc aussi le plus petit des majorants.
- s'il est vide, tout élément de $\mathbb{R}_+$ est un majorant donc le plus petit des majorants (la borne supérieure) est 0.

Remarquez l'importance de bien préciser l'ensemble ordonné de référence pour le dernier cas : la borne supérieure de $\varnothing$ dans $\mathbb{R}_+$ n'est pas la même que dans $\mathbb{R}$ entier. Pour tout ensemble I, on note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
Pour motiver la définition de la sommabilité, on reexprime la convergence d'une série à termes positifs de façon à ne plus faire intervenir l'ordre (infini) de sommation, grâce à une version symétrisée dans laquelle toutes les sommes finies ont des rôles équivalents, et plus seulement les sommes partielles.

Théorème II.19 (Reexpression de la convergence des STP)**.** *Soit $\sum a_n$ une STP. Alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n$ est bien définie dans $\mathbb{R}$ et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} a_k,\ J \in P_f(\mathbb{N}) \right\}.$$

En particulier, $\sum a_n$ converge si et seulement si l'ensemble de toutes les sommes finies est majoré.

Éléments de preuve. Toute somme finie est majorée par une somme partielle donc par la somme totale. Réciproquement, les sommes partielles sont des sommes sur une partie finie. □

Cette propriété motive la définition suivante :

Définition II.20 (Somme quelconque de termes positifs). *Soit I un ensemble quelconque et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ (éventuellement infinis). On définit*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{\mathbb{R}_+} \left\{ \sum_{j\in J} a_j,\ J \in P_f(I) \right\}.$$

Proposition II.21 (Somme d'inégalités). *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si pour tout $i \in I$, $a_i \leq b_i$, alors*

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

Éléments de preuve. Les sommes finies des a_i sont majorées par les sommes finies correspondantes des b_i, donc par la somme totale des b_i. □

Définition II.22 (Sommabilité). *Avec les notations ci-dessus, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** si $\sum_{i\in I} a_i < +\infty$.*

Proposition II.23 (Sommabilité et somme d'une famille finie). *Si I est fini, et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs (non infinis), alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et sa somme correspond à la somme finie usuelle.*

Éléments de preuve. La somme finie sur I est le maximum (donc la borne supérieure) de l'ensemble des sommes finies. □

Proposition II.24 (STP et familles sommables). *Soit $\sum a_n$ une STP.*

1. *Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ (le terme de gauche étant la somme de la série, le terme de droite étant la somme de la famille sommable).*
2. *En particulier, $\sum a_n$ converge ssi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.*

Corollaire II.25 (Invariance de la somme d'une STP par permutation des termes). *Soit $\sum a_n$ une STP et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Cette égalité étant valide dans $\mathbb{R}_+$, en particulier, les deux séries ont même nature.

Éléments de preuve. La permutation σ induit une permutation $J \mapsto \sigma(J)$ de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Ainsi, les sommes finies sont les mêmes pour les deux séries, donc leur borne supérieure aussi. Remarquez que c'est aussi valide pour $i = \varnothing$. □

Remarque II.26. *La somme de termes positifs étant toujours définie dans $\mathbb{R}_+$, les calculs (et les majorations) effectués sur la somme sont valides sans avoir de justification de convergence à faire a priori. Cela nous autorisera dans de nombreux calculs liés à des probabilités (calculs d'espérance) à faire les calculs avant l'étude de convergence et à justifier la convergence a posteriori, par l'obtention d'un résultat non infini. Attention toutefois à n'utiliser cet argument que pour des familles positives !*

On montre le théorème d'associativité ci-dessous, qui est en fait un théorème de sommation par paquets.

Théorème II.27 (Associativité pour les familles positives)**.** *Soit I un ensemble quelconque, $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I. Soit $a = (a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right).$$

Éléments de preuve. Tout sous-ensemble fini J de I est réunion disjointe des $J\cap I_k$ qui sont eux-mêmes finis et dont seul un nombre fini est non vide. Cela donne une première inégalité en passant au sup.
Réciproquement, partir de $K'\subset K$ fini, et $I'_k\subset I_k$ finis. La somme sur les indices correspondants est majorée par la somme totale (dans $\mathbb{R}_+$) passer au sup pour récupérer chacun des I_k. Puis encore le sup pour récupérer K. □

Exemple II.28. *Montrer la divergence de la série harmonique en utilisant la sommation par paquets avec les paquets :*

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad J_k = [2^k, 2^{k+1}-1].$$

Corollaire II.29 (Théorème de Fubini positif)**.** *Soit I et J deux ensembles quelconques, et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{i,j}.$$

Éléments de preuve. Il suffit d'écrire $I\times J = \bigcup_{i\in I}\{i\}\times J = \bigcup_{j\in J} I\times\{j\}$. □

Corollaire II.30. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives d'éléments de $\mathbb{R}_+$, et $\lambda > 0$. Alors*

$$\sum_{i\in I}(a_i+\lambda b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \lambda\sum_{i\in I} b_i.$$

Éléments de preuve. C'est Fubini, avec $J=\{1,2\}$ (pour séparer a_i et b_i). Sortir λ ne pose pas de problème. Cette relation est valide dans $\mathbb{R}_+$, les termes eux-mêmes pouvant être infinis. En particulier, on obtient alors : □

Corollaire II.31. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives sommables, et $\lambda > 0$. Alors $(a_i+\lambda b_i)$ est aussi sommable.*

II.6 Famille sommable de nombres complexes

Définition II.32 (Famille sommable)**.**

- *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille de réels positifs $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, i.e. si $\sum_{i\in I}|a_i| < +\infty$.*
- *On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indexées sur I. Pour être plus précis, on peut noter $\ell^1(I,X)$ l'ensemble des familles sommables indexées sur I à valeurs dans $X\subset\mathbb{C}$.*

Remarque II.33.

- *Toute famille finie est sommable.*
- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi $\sum a_n$ est absolument convergente.*